Lógica de Primeira Ordem

Lógica e Computação

Francisco Coelho

Departamento de Informática
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade de Évora

17 de março de 2022

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

O mundo é formado por objetos e descrito por relações entre esses objetos.

Objetivo: Ultrapassar os **limites expressivos** da lógica proposicional.

Plano: Aumentar a sintaxe com **objetos**, **funções**, **relações**, **variáveis** e **quantificadores**.

Adaptar: As **regras** e os **modelos** têm de ser revistos e aumentados.

Usufruir: Os novos conceitos e ferramentas permitem **expandir e sofisticar a abordagem** aos problemas (noutro capítulo).

2, Lua, Lógica e Computação, Aragorn, Ariadne

$2 > 3$, $\text{Primo}(21)$, $\text{Satélite}(\text{Lua}, \text{Terra})$, $\text{Humano}(\text{Legolas})$

$$\forall x\ \text{Anão}(x) \to \exists y\ \text{Elfo}(y) \land \text{Amigo}(x, y)$$

$$\forall p\ \text{Brisa}(p) \to \exists y\ \text{Adjacente}(p, y) \land \text{Poço}(y)$$

$$\forall x\ \exists y\ y > x + \pi \vee e^y \leqslant x$$

Termos São definidos por **constantes**, **funções** e por **variáveis**. Identificam objetos.

Fórmulas São definidas por **relações**, **conectivos** e expressões com **quantificadores**. Descrevem factos.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Termos)

Sejam $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$ conjuntos de símbolos de variáveis, constantes e funções. São termos:

Átomos Qualquer constante e qualquer variável.

Funções Se $t_1, \ldots, t_n$ forem termos e $f_n \in \mathcal{F}$ então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Um termo em que não ocorrem variáveis diz-se fechado. Caso contrário diz-se aberto.

Em geral, a aridade faz parte da especificação de cada símbolo funcional $f \in \mathcal{F}$ e –a seguir– de cada $r \in \mathcal{R}$. **Quando necessário** indica-se a aridade com um indice — f_2 é binária, g_7 é 7-ária, *etc.*

Exemplos de Termos

Átomos 2, Lua, Aragorn, Ariadne, x.

Funções $1+1$, Satélite(Terra), $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+e^{i\pi}$, $a+x$, $f()$.

Não são termos:

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ é uma expressão infinita.
- Par(2) é uma proposição (verdade/falso)
- $x > y$ é uma proposição.
- sin é um símbolo funcional mas a expressão *não está completa*.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Fórmulas — com igualdade)

Sejam $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$ como na definição de termos e $\mathcal{R}$ um conjunto de símbolos de relações. São fórmulas:

Igualdade Se a, b forem termos, $a = b$ é uma fórmula.

Conectivos Se p, q forem fórmulas, $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ são fórmulas.

Relações Se $t_1, \ldots, t_n$ forem termos e $r_n \in \mathcal{R}$ então $r(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula.

Quantificadores Se x for uma variável e p uma fórmula, $\forall x\ p$ e $\exists x\ p$ são fórmulas.

- Um uso da igualdade é nas formação de **fórmulas**, por exemplo, $2 + 2 = 4$.
- Outro uso é quando comparamos as **expressões** «$2 + 2$» e «4» que são, obviamente, diferentes.
- Para distinguir o primeiro caso do segundo, usamos a notação $==$ (dois «$=$») para indicar a igualdade de expressões.

Igualdade $2 = 2$, $2 = 1$, $\mathsf{Lua} = \mathsf{Satélite}(\mathsf{Terra})$.

Conectivos $\mathsf{Lua} = \mathsf{Satélite}(\mathsf{Terra}) \wedge \mathsf{Massa}(\mathsf{Lua}) < \mathsf{Massa}(\mathsf{Terra})$.

Relações $\mathsf{Par}(2) \vee x > 3$.

Quantificadores $\left(\forall x\ \mathsf{Par}(x)\right) \to 2 < 1$.

Não são fórmulas:

- 2, Lua, x, $0 + 1 + 2 + y$ porque são termos.
- $=$, $<$, Par são símbolos relacionais mas as expressões estão *incompletas*.
- $\mathsf{Par}(2) > 4$ é um erro de sintaxe.
- $\mathsf{Par}(0) \wedge \mathsf{Par}(2) \wedge \mathsf{Par}(4) \wedge \cdots$ expressão infinita.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Variáveis, Quantificadores, Termos, ...

- A definição de fórmula (de primeira ordem) não é simples.
- As variáveis têm um papel especial e delicado.
- Intuitivamente, o papel de x em $\exists x\ 2 < x$ é simples de entender. Assim como o de y em $\exists y\ 2 < y$.
- Mas em casos mais complexos, como $\exists x\ z < x$, podem haver **interferências** entre z e x.

Para evitar efeitos indesejados dessas interferências são necessárias várias definições e condições para **identificar e conter esses efeitos**.
Nas próximas páginas são definidas ocorrências *livres* e *ligadas*; *condições* e *parâmetros*; referências; *substituições*; variáveis *condicionadas* e *termos livres* para substituições.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Natural	Formal	Tipo	Resultado
$2 + 3$	$\mathsf{Soma}(2, 3)$	função	termo
$n < 3$	$\mathsf{Menor}(n, 3)$	relação	fórmula
e^x	$\mathsf{Exp}(x)$	função	termo
$\sin(z)$	$\mathsf{Sin}(z)$	função	termo
$4 = 5\frac{4}{5}$	$4 = \mathsf{Mult}\big(5, \mathsf{Div}(4, 5)\big)$	relação	fórmula
$\pi \neq 3$	$\neg\,(\pi = 3)$	relação	fórmula
$2 + 3 \times 4$	$\mathsf{Soma}\big(2, \mathsf{Mult}(3, 4)\big)$	função	termo
$(2 + 3) \times 4$	$\mathsf{Mult}\big(\mathsf{Soma}(2, 3)\,, 4\big)$	função	termo
$2 + 3 \vee 4 + 1$			

Definição (Variável Ligada)

Numa fórmula $\forall x\ p$ ou $\exists x\ p$ qualquer ocorrência de x em p diz-se ligada. As ocorrências não ligadas dizem-se livres.

Exemplo (Ocorrências Ligadas e Livres)

Fórmula	**Ligadas**	**Livres**
$x + 3 > y$		x, y
$\exists x\ x > 2$	x	
$x = y$		x, y
$\exists x\ x = y$	x	y
$\forall x\ \exists y\ x = y$	x, y	
$y/2 = e^{-1} \vee \exists y\ \forall x\ x > y$	x, y	y
$(\forall x\ x = y) \to x < \pi$	x	x, y

Um variável ligada pode ser **sintaticamente trocada** por outra:

$$\forall x\ x > 2 \equiv \forall y\ y > 2$$

tal como

$$\sum_{i=1}^{10} 3i = \sum_{j=1}^{10} 3j.$$

$$p(x)$$

Definição (Condição, Parâmetro)

Quando a variável x ocorre livre na fórmula p diz-se que p é uma condição em x ou que x é um parâmetro de p e escreve-se $p(x)$.

N.B.

- A expressão «$p(x)$» não é uma fórmula — «p» é que é.
- $p(x)$ mostra **interesse** nas ocorrências livres de x em p.
- Quando x não ocorre livre em p então $p(x)$ não tem nada de interessante para mostrar.

- $p(x) : \exists y \; x > y$.
- $p(x, y) : \neg (x = y)$.
- $p(x) : \neg (x = y)$.
- $p(x, y) : (\exists x \; y > x) \wedge (\exists y \; y > x) \wedge (\exists z \; y > z > x)$.
- $p(x, y) : (\exists u \; y > u) \wedge (\exists v \; v > x) \wedge (\exists w \; y > w > x)$.

Notação $e : d$

Quando escrevemos $e : d$ estamos a usar e como uma referência para a fórmula ou termo d. Não confundir $e : d$ com $e = d$, $e \equiv d$, $e \leftrightarrow d$ ou $e == d$. Além disso, «e» não é uma fórmula nem um termo — uma referência é uma *conveniência* de notação.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$p\{x/t\}$$

Definição (Substituição)

Sejam p uma fórmula, x uma variável e t um termo. Então a substituição de x por t em p, escrita $p\{x/t\}$, é a fórmula que se obtém substituindo **todas as ocorrências livres de** x em p por t.

N.B.

- Se x não ocorre livre em p então $p\{x/t\} == p$.
- «$p\{x/t\}$», como sequência de símbolos (que acaba em «$\}$») **não é uma fórmula** — mas o resultado da substituição é.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- $p : \exists y \; x > y$
  - $p\{x/z\} : \exists y \; z > y$ — «$p\{x/z\}$» não é uma fórmula mas «$\exists y \; z > y$» é.
  - $p\{y/w\} : \exists y \; x > y$ — porque y não é livre.
- $p : \neg(x = y)$
  - $p\{x/y\} : \neg(y = y)$ — cuidado!
  - $p\{y/w\} : \neg(x = w)$.
- $p : (\exists x \; y > x) \vee (\forall y \; y > x) \to (\exists z \; y > z > x)$
  - $p\{y/v\} : (\exists x \; v > x) \vee (\forall y \; y > x) \to (\exists z \; v > z > x)$.
  - $p\{y/v\}\{x/u\} : (\exists x \; v > x) \vee (\forall y \; y > u) \to (\exists z \; v > z > u)$.

- **Intuitivamente,** em $p\{x/t\}$ a variável x representa **o caso geral** e t **um caso particular**.
- Se p é «*verdadeira para o caso geral*» x deve ainda ser «*verdadeira para o caso particular*» t. Mas:
  - Nos números naturais, seja $p(x) : \exists y\ x < y$, que é «*verdadeira em geral*» (isto é, para qualquer número natural x).
  - Mas $p\{x/y\} : \exists y\ y < y$ é «*falsa*»: nenhum número é menor que ele próprio.
  - As regras de dedução não podem permitir $\mathtt{v} \vdash \mathtt{f}$.

Para **prevenir** efeitos indesejados é preciso **identificar** precisamente as potenciais fontes de problemas com a substituição.

Definição (Termo Fechado; Variável Condicionada; Termo Livre)

Seja p uma fórmula e x uma variável em p.

Termo Fechado: Um termo onde não ocorrem variáveis é fechado.

Variável Condicionada: A variável y condiciona x em p se há uma ocorrência livre de x em p numa sub-fórmula $\forall y\ q$ ou $\exists y\ q$.

Termo Livre: O termo t é livre para x em p se nenhuma variável de t condiciona x em p.

- A variável y não condiciona x em p se nenhuma ocorrência livre de x em p é numa sub-fórmula $\forall y\ q$ ou $\exists y\ q$.
- O termo
  t não é livre para x em p se t tem uma variável que afeta x em p, isto é, se:

  Há uma ocorrência livre de x numa sub-fórmula $\forall y\ q$ ou $\exists y\ q$ de p e y ocorre em t.

Um termo t é livre para x em p se:

- Não ocorrem variáveis em t — isto é, se t é fechado.
- Não existem variáveis comuns entre t e p.
- Nenhuma variável de t está quantificada em p.
- Onde uma variável de t está quantificada em p não ocorre x.

Um termo $\boxed{\cdots y \cdots}$ não é livre para x em

$$\cdots \boxed{\forall y \; q(x, y) \; \cdots}$$

$$\cdots \boxed{\exists y \; q(x, y) \; \cdots}$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Seja p : $\boxed{\exists y\ x < y}$ — x é livre, y ligada e y condiciona x.

- $3w$ é livre para x em p — não têm variáveis comuns.
- Nenhuma variável de $z + x$ está quantificada em p — é livre para x em p.
- y^2 não é livre para x em p porque y está quantificada em p e nessa sub-fórmula x é livre; $p\{x/y^2\} == \exists y\ \boxed{y^2} < y$.
- Pela mesma razão, $x + y$ não é livre para x em p; $p\{x/x + y\} == \exists y\ \boxed{x + y} < y$.

N.B. em w e $z + x$ obtêm-se condições em todas as variáveis dos termos mas isso não acontece com y^2 nem com $x + y$.

$$H \vdash p$$

As **fórmulas** da LPO estendem as **proposições**.

- Há **quatro tipos de fórmulas**: igualdades, conectivos, relações e quantificadores.
- Os **conectivos** são os da lógica proposicional.
- As regras das **relações** são específicas do domínio.
- Faltam regras para a igualdade e para os quantificadores.

Também as **constantes** e as **funções** são *específicas do domínio* — porque, de facto, podem ser definidas como casos especiais das relações.

$$\forall$$

- **Intuitivamente** $\forall x \; \mathsf{Par}(x)$ é uma **conjunção**:

$$\mathsf{Par}(0) \wedge \mathsf{Par}(1) \wedge \mathsf{Par}(2) \wedge \cdots$$

- Tal como $\sum_i \mathsf{Exp}(i) = \mathsf{Exp}(0) + \mathsf{Exp}(1) + \mathsf{Exp}(2) + \cdots$
- Portanto, as regras para o quantificador universal estão relacionadas com as regras da conjunção: $\{p, q\} \vdash p \wedge q$ e $p \wedge q \vdash p$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação do Quantificador Universal)

$$\forall^- : \forall x \; p(x) \vdash p(t)$$

ou

$$\frac{\forall x \; p(x)}{p(t)} \; (\forall^-) \, .$$

desde de que t **seja livre para** x **em** p.

N.B. A regra $\forall^-$ é uma generalização das regras $\wedge_1{}^-$ e $\wedge_2{}^-$.

Se x não ocorre em p então $\forall x\ p \vdash p$:

1.	$\forall x\ p$	H		
2.	p	$\forall^-$	1	$p\{x/t\}$, t fechado $\square$

- Na linha 2, $p == p\{x/t\}$ porque x não ocorre em p.
- Também na linha 2, a regra $\forall^-$ permite escolher termos fechados (onde não ocorrem variáveis).

Para qualquer termo fechado a, $\forall x\, p(x) \to q(x)\,, p(a) \vdash q(a)$.

1.	$\forall x\, p(x) \to q(x)$	H		
2.	$p(a)$	H		
3.	$p(a) \to q(a)$	$\forall^-$	1	$\left[p(x) \to q(x)\right]\{x/a\}$
4.	$q(a)$	$\to^-$	2, 3	$\square$

- Como não ocorrem variáveis em a este é livre para x em $p(x) \to q(x)$.
- Também na linha 3, a regra $\forall^-$ permite $\{x/a\}$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução do Quantificador Universal)

$$\forall^{+} : \left[(a) \cdots \vdash p(a)\right] \vdash \forall x \; p(x)$$

ou

$$\cfrac{\boxed{\begin{array}{l} \qquad\qquad (a) \\ \quad \vdots \\ p(a) \end{array}}}{\forall x \; p(x)} \; (\forall^{+}) \, .$$

desde que **a variável** a **não ocorra fora da sub-prova nem em hipóteses ativas**.

Se x não ocorre em p então $p \vdash \forall x\, p$:

1.	p	H		a nova e não ocorre aqui
2.	$\forall x\, p(x)$	$\forall^+$	$1-1$	$\square$

O *truque* está em escolher uma variável a «*nova*», portanto que não ocorre em p. Além disso, também $p == p(x) == p\{a/x\}$.

Analogia. Considere a expressão $e : 2t$. Como a variável a não ocorre em e então $e(a) == 2t == e$. Além disso, substituir a por x em e também resulta em $2t == e$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

1.	$\forall x\ x = x$	H		
2.	$a = a$	$\forall^-$	$1(a)$	$(x = x)\{x/a\}$
3.	$\forall y\ a = y$	$\forall^+$	$2 - 2$	
4.	$\forall x\ \forall y\ x = y$	$\forall^+$	$3 - 3$	

Nesta falsa demonstração, de que «*todos os termos são iguais*», o erro está na linha 3 porque

Exemplo: Aplicação Errada de $\forall^+$

1.	$\forall x\ x = x$	H		
2.	$a = a$	$\forall^-$	$1(a)$	$(x = x)\{x/a\}$
3.	$\forall y\ a = y$	$\forall^+$	$2 - 2$	
4.	$\forall x\ \forall y\ x = y$	$\forall^+$	$3 - 3$	

Nesta falsa demonstração, de que «*todos os termos são iguais*», o erro está na linha 3 porque a **ocorre fora da sub-prova** $2 - 2$.

1.	$\forall x$ $2x$ é par.	Hipótese.
2.	$2a$ é par.	Para qualquer a.
3.	$\forall y$ $2y$ é par.	«*Definição*» de $\forall$

Quantificador Existencial

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$\exists$$

- **Intuitivamente** $\exists x\ \mathsf{Sus}(x)$ é uma **disjunção**:

$$\mathsf{Sus}(\mathsf{Red}) \vee \mathsf{Sus}(\mathsf{Blue}) \vee \mathsf{Sus}(\mathsf{Green}) \vee \cdots .$$

- Portanto, as regras para o quantificador existencial estão relacionadas com as regras da disjunção: $p \vdash p \vee q$ e $\{p \vee q, [p \vdash r], [q \vdash r]\} \vdash r$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação do Quantificador Existencial)

$$\exists^- : \left\{ \exists x\ p(x)\,,\ \left[p(a) \vdash q \right] \right\} \vdash q$$

ou

$$\dfrac{\exists x\ p(x) \qquad \boxed{\begin{array}{cc} p(a) & H \\ \vdots & \\ q & \end{array}}}{q}\ (\exists^-)\,.$$

desde que a **não ocorra fora da sub-prova**.

Mais à frente é desenvolvido um exemplo de aplicação **correta** desta regra. O caso seguinte é uma aplicação **incorreta**:

1.	$\exists x\ p(x)$	H		
2.	$p(a)$	H	(a)	$p\{x/a\}$
3.	$p(a)$	$\exists^-$	$1, 2-2$	
4.	$\forall x\ p(x)$	$\forall^+$	$2-3$	

O erro está na linha 3 porque

Mais à frente é desenvolvido um exemplo de aplicação **correta** desta regra. O caso seguinte é uma aplicação **incorreta**:

1.	$\exists x\ p(x)$	H		
2.	$p(a)$	H	(a)	$p\{x/a\}$
3.	$p(a)$	$\exists^-$	$1, 2-2$	
4.	$\forall x\ p(x)$	$\forall^+$	$2-3$	

O erro está na linha 3 porque a **ocorre fora da sub-prova** $2-2$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução do Quantificador Existencial)

$$\exists^+ : p(t) \vdash \exists x \; p\{t/x\}$$

ou

$$\frac{p(t)}{\exists x \; p\{t/x\}} \; (\exists^+) \, .$$

desde que t **seja livre para** x em p e x não ocorra em $p(t)$.

Excecionalmente nesta regra, de $p(t)$ para $p\{t/x\}$ são substituídas **algumas** ocorrências de t por x, mas *não obrigatoriamente todas*. Por exemplo:

$$\frac{2 + 4 > 1 + 4}{\exists x \; 2 + x > 1 + 4} \; (\exists^+)$$

1.	$\exists x \; x + 2 = 6$	Hipótese.
2.	$a + 2 = 6$	Seja a como acima.
3.	$\exists y \; a + 2 = 6$	«*Definição*» de $\exists$

1.	$\exists x\ x + 2 = 6$	Hipótese.	1.	$\forall x\ 2x$ é par.	Hipótese.
2.	$a + 2 = 6$	Seja a como acima.	2.	$2a$ é par.	Para qualquer a.
3.	$\exists y\ a + 2 = 6$	«*Definição*» de $\exists$	3.	$\forall y\ 2y$ é par.	«*Definição*» de $\forall$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Para qualquer termo fechado a, $\forall x\, p(x) \rightarrow q(x), p(a) \vdash \exists x\, q(x)$:

1.	$\forall x\, p(x) \rightarrow q(x)$	H		
2.	$p(a)$	H		
3.	$p(a) \rightarrow q(a)$	$\forall^-$	1	$[p(x) \rightarrow q(x)]\{x/a\}$
4.	$q(a)$	$\rightarrow^-$	2, 3	
5.	$\exists x\, q(x)$	$\exists^+$	4	a fechado $\square$

Na linha 5 x não ocorre em $q(a)$ porque esta resulta de $\{x/a\}$ e x não ocorre em a.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução da Igualdade)

$$=^{+} : \vdash t = t$$

ou

$$\frac{}{t = t}\ (=^{+})\,.$$

onde t é um termo fechado (sem variáveis).

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação da Igualdade)

$$=^{-} : \left\{t_1 = t_2, p\{x/t_1\}\right\} \vdash p\{x/t_2\}$$

ou

$$\frac{t_1 = t_2 \quad p\{x/t_1\}}{p\{x/t_2\}} \; (=^{-}) \, .$$

desde que t_1, t_2 **sejam livres para** x **em** p.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

1. Seja p uma condição em x, por exemplo $p(x) == x > 1$.
2. Seja t_1 um termo que satisfaz $p(x)$, digamos $t_1 == 42$ — isto é $p\{x/42\}$.
3. Agora, se soubermos que $t_1 = t_2$, por exemplo, $42 = 40 + 2$ então concluímos que $p\{x/t_2\}$ isto é, $40 + 2 > 1$.

Leis de De Morgan

$$\neg\forall x\ p \dashv\vdash \exists x\ \neg p \qquad \neg\exists x\ p \dashv\vdash \forall x\ \neg p$$

Em geral

$$(\forall x\ p) \wedge (\forall x\ q) \dashv\vdash \forall x\,(p \wedge q) \qquad \forall x\ \forall y\ p \dashv\vdash \forall y\ \forall x\ p$$
$$(\exists x\ p) \vee (\exists x\ q) \dashv\vdash \exists x\,(p \vee q) \qquad \exists x\ \exists y\ p \dashv\vdash \exists y\ \exists x\ p$$

Se x não ocorre em q:

$$q \wedge \forall x\ p \dashv\vdash \forall x\,(q \wedge p) \qquad q \vee \forall x\ p \dashv\vdash \forall x\,(q \vee p)$$
$$q \wedge \exists x\ p \dashv\vdash \exists x\,(q \wedge p) \qquad q \vee \exists x\ p \dashv\vdash \exists x\,(q \vee p)$$
$$q \to \forall x\ p \dashv\vdash \forall x\,(q \to p) \qquad q \to \exists x\ p \dashv\vdash \exists x\,(q \to p)$$
$$(\forall x\ p) \to q \dashv\vdash \exists x\,(p \to q) \qquad (\exists x\ p) \to q \dashv\vdash \forall x\,(p \to q)$$

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x\, p(x)\,.$$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x \; p(x) \,.$$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\,(q \wedge p(x))$	H

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x\,\big(q \wedge p(x)\big) \vdash q \wedge \forall x\; p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\,(q \wedge p\,(x))$	H		
2.	$q \wedge p\,(a)$	$\forall^{-}$	$1\ \{x/a\}$	a nova

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\,(q \wedge p(x))$	H		
2.	$q \wedge p(a)$	$\forall^-$	$1\ \{x/a\}$	a nova
3.	$p(a)$	$\wedge_2{}^-$	2	

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\left(q \wedge p(x)\right)$	H		
2.	$q \wedge p(a)$	$\forall^-$	$1\ \{x/a\}$	a nova
3.	$p(a)$	${\wedge_2}^-$	2	
4.	$\forall x\ p(x)$	$\forall^+$	$2 - 3\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui nem em hipóteses ativas

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x \left(q \wedge p(x)\right) \vdash q \wedge \forall x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\,(q \wedge p(x))$	H		
2.	$q \wedge p(a)$	$\forall^-$	$1\ \{x/a\}$	a nova
3.	$p(a)$	$\wedge_2{}^-$	2	
4.	$\forall x\ p(x)$	$\forall^+$	$2-3\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui nem em hipóteses ativas
5.	$q \wedge p(b)$	$\forall^-$	$1\ \{x/b\}$	b nova

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x\, \big(q \wedge p(x)\big) \vdash q \wedge \forall x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\, (q \wedge p(x))$	H		
2.	$q \wedge p(a)$	$\forall^-$	$1\ \{x/a\}$	a nova
3.	$p(a)$	$\wedge_2{}^-$	2	
4.	$\forall x\ p(x)$	$\forall^+$	$2-3\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui nem em hipóteses ativas
5.	$q \wedge p(b)$	$\forall^-$	$1\ \{x/b\}$	b nova
6.	q	$\wedge_1{}^-$	5	

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\forall x\,(q \wedge p(x)) \vdash q \wedge \forall x\; p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\forall x\,(q \wedge p(x))$	H		
2.	$q \wedge p(a)$	$\forall^-$	$1\ \{x/a\}$	a nova
3.	$p(a)$	${\wedge_2}^-$	2	
4.	$\forall x\; p(x)$	$\forall^+$	$2-3\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui nem em hipóteses ativas
5.	$q \wedge p(b)$	$\forall^-$	$1\ \{x/b\}$	b nova
6.	q	${\wedge_1}^-$	5	
7.	$q \wedge \forall x\; p(x)$	$\wedge^+$	6, 4	$\square$

Exemplo: Provas com Quantificadores $\forall$

$$q \wedge \forall x\, p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Exemplo: Provas com Quantificadores $\forall$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x \; p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x\left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H	
2.	q	$\wedge_1^-$	1

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H	
2.	q	$\wedge_1{}^-$	1
3.	$\forall x\ p(x)$	$\wedge_2{}^-$	1

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H		
2.	q	$\wedge_1{}^{-}$	1	
3.	$\forall x\ p(x)$	$\wedge_2{}^{-}$	1	
4.	$p(a)$	$\forall^{-}$	3 $\{x/a\}$	a nova

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x \left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H		
2.	q	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	$\forall x\ p(x)$	$\wedge_2{}^-$	1	
4.	$p(a)$	$\forall^-$	$3\ \{x/a\}$	a nova
5.	$q \wedge p(a)$	$\wedge^+$	$2, 4$	

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \wedge \forall x\ p(x) \vdash \forall x\left(q \wedge p(x)\right).$$

Uma prova possível é:

1.	$q \wedge \forall x\ p(x)$	H			
2.	q	$\wedge_1{}^-$	1		
3.	$\forall x\ p(x)$	$\wedge_2{}^-$	1		
4.	$p(a)$	$\forall^-$	$3\ \{x/a\}$	a nova	
5.	$q \wedge p(a)$	$\wedge^+$	$2, 4$		
6.	$\forall x\left(q \wedge p(x)\right)$	$\forall^+$	$2 - 5\ \{a/x\}$	(obs)	$\square$

obs: a não ocorre em 6 nem em hipóteses ativas.

Exemplo: Provas com Quantificadores $\exists$

$$q \vee \exists x\, p(x) \vdash \exists x\, \big(q \vee p(x)\big)\,.$$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\ p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1. $q \vee \exists x\ p(x)$ H

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\ p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1. $q \vee \exists x\ p(x)$ H

10. $\exists x \left(q \vee p(x)\right)$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\ p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1{}^{+}$	2	a nova
10.	$\exists x \left(q \vee p(x)\right)$			

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\ p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1{}^{+}$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^{+}$	$3\ \{a/x\}$	a livre para x em p
10.	$\exists x\ (q \vee p(x))$			

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\, p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1{}^+$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	$3\ \{a/x\}$	a livre para x em p
5.	$\exists x\ p(x)$	H		
6.	$p(b)$	H	$5\ \{x/b\}$	b nova, logo livre para x em p
10.	$\exists x\ (q \vee p(x))$			

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\, p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	${\vee_1}^+$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	3 $\{a/x\}$	a livre para x em p
5.	$\exists x\ p(x)$	H		
6.	$p(b)$	H	5 $\{x/b\}$	b nova, logo livre para x em p
7.	$q \vee p(b)$	${\vee_2}^+$	6	
10.	$\exists x\, (q \vee p(x))$			

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\, p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\, p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1{}^+$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	3 $\{a/x\}$	a livre para x em p
5.	$\exists x\ p(x)$	H		
6.	$p(b)$	H	5 $\{x/b\}$	b nova, logo livre para x em p
7.	$q \vee p(b)$	$\vee_2{}^+$	6	
8.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	7 $\{b/x\}$	b não ocorre aqui
10.	$\exists x\,(q \vee p(x))$			

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\, p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H		
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1{}^{+}$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^{+}$	$3\ \{a/x\}$	a livre para x em p
5.	$\exists x\ p(x)$	H		
6.	$p(b)$	H	(9)	b nova, logo livre para x em p
7.	$q \vee p(b)$	$\vee_2{}^{+}$	6	
8.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^{+}$	$7\ \{b/x\}$	b não ocorre aqui
9.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^{-}$	$5, 6 - 8$	b não ocorre aqui
10.	$\exists x\ (q \vee p(x))$			

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$q \vee \exists x\ p(x) \vdash \exists x \left(q \vee p(x)\right).$$

1.	$q \vee \exists x\ p(x)$	H		
2.	q	H	(10)	
3.	$q \vee p(a)$	$\vee_1^+$	2	a nova
4.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	3 $\{a/x\}$	a livre para x em p
5.	$\exists x\ p(x)$	H	(10)	
6.	$p(b)$	H	(9)	b nova, logo livre para x em p
7.	$q \vee p(b)$	$\vee_2^+$	6	
8.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^+$	7 $\{b/x\}$	b não ocorre aqui
9.	$\exists x\ (q \vee p(x))$	$\exists^-$	$5, 6 - 8$	b não ocorre aqui
10.	$\exists x\,(q \vee p(x))$	$\vee^-$	$1, 2 - 4, 5 - 9$	$\square$

Exemplo: Provas com Quantificadores $\exists$

$$\exists x\,\big(q \vee p(x)\big) \vdash q \vee \exists x\; p(x)\,.$$

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1. $\exists x\,(q \vee p(x))$ H

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x\,\big(q \vee p(x)\big) \vdash q \vee \exists x\; p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\,\big(q \vee p(x)\big)$	H	
2.	$q \vee p(a)$	$\mathrm{H}\ 1\{x/a\}$	a nova

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x \left(q \vee p(x)\right)$	H	
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$	a nova
3.	q	H	um caso de 2

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x\,\big(q \vee p(x)\big) \vdash q \vee \exists x\; p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\,(q \vee p(x))$	H		
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$		a nova
3.	q	H		um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\; p(x)$	$\vee_1{}^+$	3	a não ocorre aqui

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x\left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\left(q \vee p(x)\right)$	H		
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$		a nova
3.	q	H		um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_1}^{+}$	3	a não ocorre aqui
5.	$p(a)$	H		o outro caso de 2

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\,(q \vee p(x))$	H		
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$		a nova
3.	q	H		um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_1}^{+}$	3	a não ocorre aqui
5.	$p(a)$	H		o outro caso de 2
6.	$\exists x\ p(x)$	$\exists^{+}$	5 $\{a/x\}$	a não ocorre aqui e livre...

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\left(q \vee p(x)\right)$	H		
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$		a nova
3.	q	H		um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_1}^+$	3	a não ocorre aqui
5.	$p(a)$	H		o outro caso de 2
6.	$\exists x\ p(x)$	$\exists^+$	$5\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui e livre...
7.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_2}^+$	6	a não ocorre aqui

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\,(q \vee p(x))$	H		
2.	$q \vee p(a)$	$H\ 1\{x/a\}$		a nova
3.	q	H	(8)	um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_1}^+$	3	a não ocorre aqui
5.	$p(a)$	H	(8)	o outro caso de 2
6.	$\exists x\ p(x)$	$\exists^+$	$5\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui e livre...
7.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_2}^+$	6	a não ocorre aqui
8.	$q \vee \exists x\ p(x)$	$\vee^-$	$2, 3 - 4, 5 - 7$	a não ocorre aqui

Demonstrar que se x não ocorre em q então

$$\exists x \left(q \vee p(x)\right) \vdash q \vee \exists x\ p(x)\,.$$

Uma prova possível é:

1.	$\exists x\,(q \vee p(x))$	H		
2.	$q \vee p(a)$	H $1\{x/a\}$	(9)	a nova
3.	q	H	(8)	um caso de 2
4.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_1}^+$	3	a não ocorre aqui
5.	$p(a)$	H	(8)	o outro caso de 2
6.	$\exists x\ p(x)$	$\exists^+$	$5\ \{a/x\}$	a não ocorre aqui e livre...
7.	$q \vee \exists x\ p(x)$	${\vee_2}^+$	6	a não ocorre aqui
8.	$q \vee \exists x\ p(x)$	$\vee^-$	$2, 3-4, 5-7$	a não ocorre aqui
9.	$q \vee \exists x\ p(x)$	$\exists^-$	$1, 2-8$	$\square$

Exemplo: Provas com Igualdade

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$\exists x\, x = t \qquad \forall x \forall y\, x = y \to y = x$$

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre. . .
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$ (*simetria*).

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre. . .
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	a, b novas

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$	

Exemplo: Provas com Igualdade

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$	

se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$ b=a é $p\{x/b\}$

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \to y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H		a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$		
			se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$	b=a é $p\{x/b\}$
3.	$b = a$	$=^-$	$1, 2$	

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	(4)	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$		
			se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$	b=a é $p\{x/b\}$
3.	$b = a$	$=^-$	$1, 2$	
4.	$a = b \rightarrow b = a$	$\rightarrow^+$	$1 - 3$	Descarta as linhas $1 - 3$

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre. . .
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	(4)	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$		
			se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$	b=a é $p\{x/b\}$
3.	$b = a$	$=^-$	$1, 2$	
4.	$a = b \rightarrow b = a$	$\rightarrow^+$	$1 - 3$	Descarta as linhas $1 - 3$
				a,b não ocorrem em hipóteses ativas

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	(4)	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$		
			se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$	b=a é $p\{x/b\}$
3.	$b = a$	$=^-$	$1, 2$	
4.	$a = b \rightarrow b = a$	$\rightarrow^+$	$1 - 3$	Descarta as linhas $1 - 3$
				a,b não ocorrem em hipóteses ativas
5.	$\forall y\ a = y \rightarrow y = a$	$\forall^+$	$4 - 4$	y não ocorre em 4; b não ocorre aqui

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Demonstrar que se t é um termo fechado (sem variáveis) $\exists x\ x = t$.

1.	$t = t$	$=^+$		t é livre...
2.	$\exists x\ x = t$	$\exists^+$	1	$\square$

Demonstrar que $\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$ (*simetria*).

1.	$a = b$	H	(4)	a, b novas
2.	$a = a$	$=^+$		
			se p: x=a então a=a é $p\{x/a\}$	b=a é $p\{x/b\}$
3.	$b = a$	$=^-$	$1, 2$	
4.	$a = b \rightarrow b = a$	$\rightarrow^+$	$1 - 3$	Descarta as linhas $1 - 3$
				a,b não ocorrem em hipóteses ativas
5.	$\forall y\ a = y \rightarrow y = a$	$\forall^+$	$4 - 4$	y não ocorre em 4; b não ocorre aqui
6.	$\forall x \forall y\ x = y \rightarrow y = x$	$\forall^+$	$5 - 5$	x não ocorre em 5; a não ocorre aqui

$\square$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$t^v \quad p^v \quad v \models p \quad H \models p$$

Objectivos

- Descrever formalmente os objetos e as propriedades dum certo domínio — tanto quanto possível, **sem restrições**.
- Estudar com segurança esse domínio usando regras de inferência e outras propriedades lógicas.
- Generalizar as valorações dos átomos proposicionais a termos, funções, relações e fórmulas.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Interpretação)

Seja $\mathcal{U}$ um conjunto não vazio, o universo. Uma interpretação ν (de $\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ em $\mathcal{U}$) define:

- **Constantes** Para cada $c \in \mathcal{C}$, um elemento $c^\nu \in \mathcal{U}$.
- **Variáveis** Para cada $x \in \mathcal{V}$, um elemento $x^\nu \in \mathcal{U}$.
- **Funções** Para cada $f_n \in \mathcal{F}$, uma função $f^\nu : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{U}$.
- **Igualdade** $=^\nu$ é a relação de igualdade em $\mathcal{U}$, $\{(a, a) : a \in \mathcal{U}\}$.
- **Relações** Para cada $r_n \in \mathcal{R}$, um subconjunto $r^\nu \subseteq \mathcal{U}^n$.
- **Explicitação** Dada a interpretação ν, $x \in \mathcal{V}$ e $a \in \mathcal{U}$ representa-se por $\nu[x \mapsto a]$ a interpretação u em que $x^u = a$ e $y^u = y^\nu$ para $y \neq x$.

Definição (Interpretação de Termos)

Dado uma interpretação ν de $\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ no universo $\mathcal{U}$, a *interpretação* do termo t, escrita t^ν depende do tipo de t:

Constante ou Variável: Se $t \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}$ então t^ν já está definido.

Função: Se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ em que $f_n \in \mathcal{F}$ e $t_1, \ldots, t_n$ forem termos então

$$t^\nu = f^\nu\left(t_1^\nu, \ldots, t_n^\nu\right).$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- O **universo** é $\mathcal{U}_{\mathsf{SdA}} = \{x : x \text{ é uma personagem no S.d.A.}\}$.
- As **constantes** Aragorn, Sauron, ... $\in \mathcal{U}_{\mathsf{SdA}}$.
- A **relação** $\mathsf{Elfo}_1 \subset \mathcal{U}_{\mathsf{SdA}}$ é o conjunto dos Elfos. Por exemplo, $\mathsf{Elfo}(\mathsf{Galadriel})$ significa que Galadriel é uma Elfo.
- A **relação** $\mathsf{Camarada}_2 \subset \mathcal{U}^2_{\mathsf{SdA}}$ indica quando duas personagens estiveram do mesmo lado numa batalha. Por exemplo, $\mathsf{Camarada}(\mathsf{Gimli}, \mathsf{Legolas})$.
- Neste **universo** não podemos definir a função Origem_1 para se obter a proveniência duma personagem. Por exemplo, gostaríamos que $\mathsf{Origem}(\mathsf{Frodo}) = \mathsf{Shire}$. Esta limitação pode ser ultrapassada se **estendermos** o universo com os objetos adequados. Por exemplo, $\mathcal{U}^{++}_{\mathsf{SdA}} = \{x : x \text{ é uma personagem ou um local no S.d.A.}\}$.

- O **universo** é $\mathcal{U}_{\mathsf{LdM}} = \{p : p \text{ é uma sala do labirinto}\}$.
- As **constantes** $11, 12, \ldots \in \mathcal{U}_{\mathsf{LdM}}$.
- A **relação** $\mathrm{Minotauro}_1 \subset \mathcal{U}_{\mathsf{LdM}}$ é o conjunto das salas onde está o(um) Minotauro. Por exemplo, $\mathrm{Minotauro}(21)$ significa que o(um) Minotauro está na sala 21.
- A **relação** $\mathrm{Adjacente}_2 \subset \mathcal{U}^2_{\mathsf{LdM}}$ indica quando duas salas são adjacentes. Por exemplo, $\mathrm{Adjacente}(33, 43)$.
- Neste **universo** não podemos definir a função Coluna_1 para se obter a coluna duma sala. Por exemplo, gostaríamos que $\mathrm{Coluna}(12) = 2$. Esta limitação pode ser ultrapassada se **estendermos** o universo com os objetos adequados. Por exemplo, $\mathcal{U}^{++}_{\mathsf{LdM}} = \{x : x \text{ é uma sala ou um número}\}$.

Exemplo: Interpretações

Sejam $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, d_1\}$, $\mathcal{F} = \{f\}$, $\mathcal{R} = \{r, s\}$.

Símbolo	ν_{SdA}	ν_{LdM}
c_1	Aragorn	11
c_2	Sauron	12
c_3	Galadriel	21
c_4	Gimli	33
c_5	Legolas	43
c_6	Frodo	12
d_1	Shire	2
f	Origem	Coluna
r	Elfo	Minotauro
s	Camarada	Adjacente

- Temos $c_1^{\nu_{\mathsf{SdA}}} =$ Aragorn mas $c_1^{\nu_{\mathsf{LdM}}} = 11$.
- O que significa $r(c_2)$? No SdA, que Sauron é um Elfo (não é), mas no LdM, que o (um?) Minotauro está em 12 (pode estar!).

- Os exemplos anteriores mostram que a Lógica de Primeira Ordem permite descrever domínios muito diferentes — não só de fantasia.
- Não basta descrever — é necessário aplicar o sistema formal para estudar o domínio que, muitas vezes é **intangível** por ser fantasia, distante como Marte, prejudicial como uma zona radioactiva, caro, perigoso, abstrato, *etc*.
- Além das conclusões via Dedução Natural, estamos também interessados na consequência semântica — usar interpretações e atribuir valores booleanos a fórmulas.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- **Intuitivamente** a interpretação (por ν) de uma fórmula como $\forall x\ r(x)$ corresponde a afirmar que $a \in r^{\nu}$ para cada elemento a do universo $\mathcal{U}$.
- Há um **problema técnico** em exprimir rigorosamente o que acontece às variáveis da linguagem lógica. Não podemos escrever $r\{x/a\}$ porque, como a *não é um símbolo lógico* (mas um elemento do universo da interpretação) *não pode ocorrer numa fórmula*.
- É necessário um tratamento especial para as variáveis, usando a explicitação das interpretações.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$\nu \models p \quad \nu \models H$$

Definição (Modelo)

Dada uma interpretação ν de $\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ no universo $\mathcal{U}$ diz-se que a fórmula p é verdade em ν, que ν satisfaz p ou que ν é modelo de p, e escreve-se $\nu \models p$, de acordo com o tipo de p:

- **Igualdade** $\nu \models a = b$ se $a^\nu = b^\nu$.
- **Relação** $\nu \models r(t_1, \ldots, t_n)$ se $\left(t_1^\nu, \ldots, t_n^\nu\right) \in r^\nu$.
- **Universal** $\nu \models \forall x\ q$ se para cada $a \in \mathcal{U}$, $\nu[x \mapsto a] \models q$.
- **Existencial** $\nu \models \exists x\ q$ se existe $a \in \mathcal{U}$ tal que $\nu[x \mapsto a] \models q$.

Seja H um conjunto de fórmulas. Então diz-se que ν é modelo de H e escreve-se $\nu \models H$ se $\nu \models h$ para cada $h \in H$. Nesse caso também se diz que H é consistente.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$H \models p \qquad \models p$$

Definição (Consequência (Semântica))

Seja H um conjunto (possivelmente infinito) de fórmulas e p uma fórmula. Diz-se que:

Consequência p é consequência de H e escreve-se $H \models p$, se para cada modelo de H também é modelo de p: se $\nu \models H$ então $\nu \models p$.

Compatível p é compatível ou satisfazível se tem um modelo (existe ν tal que $\nu \models p$).

Válida p é válida ou uma tautologia se qualquer interpretação é modelo ($\nu \models p$ para qualquer ν). Nesse caso escreve-se $\models p$.

O símbolo $\models$ é usado com vários significados distintos:

$v \models p$: Uma interpretação e uma proposição.

$v \models H$: Uma interpretação e um conjunto de proposições.

$H \models p$: Um conjunto de proposições e uma proposição.

$\models p$: Uma proposição.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- Sejam $\mathcal{C} = \{\text{Gandalf}\}, \mathcal{R} = \{\text{Amigo}_2\}$; $\mathcal{U} = \{A, B, C\}$ e ν tal que
$$\text{Gandalf}^\nu = A, \text{Amigo}^\nu = \{(A,A), (B,A), (C,A)\}.$$
- Será que o modelo ν satisfaz
«*Nenhum dos amigos dos amigos de Gandalf é amigo dele.*»?
$$p : \forall x \forall y \underbrace{\text{Amigo}(x, \text{Gandalf}) \wedge \text{Amigo}(y, x) \to \neg\text{Amigo}(y, \text{Gandalf})}_{q(x,y)}$$
- Para verificar se $\nu \models p$ listam-se os possíveis valores de x, y:

x^ν	y^ν	$\text{Am.}(x, \text{Ga.})^\nu$	$\text{Am.}(x, y)^\nu$	$\neg\text{Am.}(y, \text{Ga.})^\nu$	$q(x,y)^\nu$
A	A	v	v	f	f
A	B	f	f	f	v
$\vdots$					

- Portanto
$$\nu[x \mapsto A][y \mapsto A] \not\models \text{Amigo}(x, \text{Gandalf}) \wedge \text{Amigo}(y, x) \to \neg\text{Amigo}(y, \text{Gandalf}).$$
- E $\nu \not\models \forall x \forall y\ \text{Amigo}(x, \text{Gandalf}) \wedge \text{Amigo}(y, x) \to \neg\text{Amigo}(y, \text{Gandalf})$.

Satisfação (SAT) **Decidir se uma fórmula p tem um modelo.** Instâncias: o conjunto das fórmulas; Condição: Existe uma interpretação v tal que $v \models p$?

Validade **Decidir se uma fórmula p é válida.** Instâncias: o conjunto das fórmulas; Condição: Para cada interpretação v, $v \models p$?

Provabilidade **Decidir se uma fórmula p tem uma prova.** Instâncias: o conjunto de todas as fórmulas. Condição: Existe uma prova de p, $\vdash p$?

N.B. que, em relação à Lógica Proposicional, aqui apenas se substituiu «*proposição*» por «*fórmula*» e «*valoração*» por «*interpretação*».

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Teorema (Indecidibilidade de SAT na LPO)

Na Lógica de Primeira Ordem o problema SAT é indecidível.

- Na **Lógica Proposicional**, existe um algoritmo (não eficiente) que decide se uma proposição é, ou não, satisfazível.
- Na **Lógica de Primeira Ordem** não existe qualquer algoritmo que decida, em geral, se uma fórmula é, ou não, satisfazível.
- Ao contrário do SAT proposicional, em que **não se sabe se existe** um algoritmo eficiente, sobre o SAT de primeira ordem **sabe-se que não existe** um algorimo, eficiente ou não.
- *Demonstrar o teorema acima está fora do âmbito desta disciplina.*
- Conhecem-se algoritmos para SAT em classes grandes de fórmulas, mas nenhum tem toda a generalidade.
- Este assunto é referido na página do Post Correspondence Problem na wikipedia.

- **A maior expressividade** da Lógica de Primeira Ordem em relação à Lógica Proposicional sacrifica a decidibilidade de SAT.
- Ainda assim, *os Amigos de Gandalf* mostram que com a **Verificação de Modelos** é possível resolver problemas práticos de modelação.

- Este domíno inclui factos como «*Zeus é pai de Atenas*» e regras como
  «*A avó de uma pessoa é a mãe de um progenitor dessa pessoa.*»

1

2

- Este domíno inclui factos como «*Zeus é pai de Atenas*» e regras como
  «*A avó de uma pessoa é a mãe de um progenitor dessa pessoa.*»
- Os termos deste domínio são pessoas ou deuses do Olimpo (para desenjoar de famílias reais).

1

2

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- Este domíno inclui factos como «*Zeus é pai de Atenas*» e regras como «*A avó de uma pessoa é a mãe de um progenitor dessa pessoa.*»
- Os termos deste domínio são pessoas ou deuses do Olimpo (para desenjoar de famílias reais).
- Duas relações unárias determinam o sexo[1]: $\text{Masculino}_1, \text{Feminina}_1$.

[1] Ver na wikipédia o Sistema XY para determinar o sexo.

2

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- Este domíno inclui factos como «*Zeus é pai de Atenas*» e regras como «*A avó de uma pessoa é a mãe de um progenitor dessa pessoa.*»
- Os termos deste domínio são pessoas ou deuses do Olimpo (para desenjoar de famílias reais).
- Duas relações unárias determinam o sexo[1]: $\mathsf{Masculino}_1, \mathsf{Feminina}_1$.
- As relações familiares são representadas por relações binárias[2]:

$$\mathsf{Progenitor}_2, \mathsf{Irm}_{\sqcup 2}, \mathsf{Irmão}_2, \mathsf{Irmã}_2, \mathsf{Descendente}_2, \mathsf{Filha}_2,$$
$$\mathsf{Filho}_2, \mathsf{Cônjuge}_2, \mathsf{Marido}_2, \mathsf{Esposa}_2, \mathsf{Av}_{\sqcup 2}, \mathsf{Net}_{\sqcup 2}, \mathsf{Ti}_{\sqcup 2}$$

[1] Ver na wikipédia o Sistema XY para determinar o sexo.
[2] Os nomes que terminam em $\sqcup$ são versões neutras.

- Este domíno inclui factos como «*Zeus é pai de Atenas*» e regras como
  «*A avó de uma pessoa é a mãe de um progenitor dessa pessoa.*»
- Os termos deste domínio são pessoas ou deuses do Olimpo (para desenjoar de famílias reais).
- Duas relações unárias determinam o sexo[1]: $\text{Masculino}_1, \text{Feminina}_1$.
- As relações familiares são representadas por relações binárias[2]:

$$\text{Progenitor}_2, \text{Irm}_{\sqcup 2}, \text{Irmão}_2, \text{Irmã}_2, \text{Descendente}_2, \text{Filha}_2,$$
$$\text{Filho}_2, \text{Cônjuge}_2, \text{Marido}_2, \text{Esposa}_2, \text{Av}_{\sqcup 2}, \text{Net}_{\sqcup 2}, \text{Ti}_{\sqcup 2}$$

- Como cada pessoa tem exatamente um pai e uma mãe (biológicos) usam-se funções: $\text{Pai}_1, \text{Mãe}_1$.

[1] Ver na wikipédia o Sistema XY para determinar o sexo.
[2] Os nomes que terminam em $\sqcup$ são versões neutras.

Regras da Árvore Geneológica

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m \ \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \land \text{Progenitor}(m, x)$$

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m\ \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \land \text{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m \; \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \wedge \text{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

$$\forall x, m \; \text{Marido}(m, x) \leftrightarrow \text{Masculino}(m) \wedge \text{Cônjuge}(m, x) \,.$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m\ \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \wedge \text{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

$$\forall x, m\ \text{Marido}(m, x) \leftrightarrow \text{Masculino}(m) \wedge \text{Cônjuge}(m, x)\,.$$

- *Masculino e Feminina são conjuntos complementares.*

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m\ \mathrm{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \mathrm{Feminina}(m) \land \mathrm{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

$$\forall x, m\ \mathrm{Marido}(m, x) \leftrightarrow \mathrm{Masculino}(m) \land \mathrm{Cônjuge}(m, x)\,.$$

- *Masculino e Feminina são conjuntos complementares.*

$$\forall x\ \mathrm{Masculino}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{Feminina}(x)\,.$$

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m \; \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \wedge \text{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

$$\forall x, m \; \text{Marido}(m, x) \leftrightarrow \text{Masculino}(m) \wedge \text{Cônjuge}(m, x) \, .$$

- *Masculino e Feminina são conjuntos complementares.*

$$\forall x \; \text{Masculino}(x) \leftrightarrow \neg \text{Feminina}(x) \, .$$

- *Progenitor e descendente são relações inversas.*

- *A mãe de uma pessoa é a progenitor feminina.*

$$\forall x, m \; \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \wedge \text{Progenitor}(m, x)$$

- *O marido de uma pessoa é o cônjuge masculino.*

$$\forall x, m \; \text{Marido}(m, x) \leftrightarrow \text{Masculino}(m) \wedge \text{Cônjuge}(m, x)\,.$$

- *Masculino e Feminina são conjuntos complementares.*

$$\forall x \; \text{Masculino}(x) \leftrightarrow \neg\text{Feminina}(x)\,.$$

- *Progenitor e descendente são relações inversas.*

$$\forall x, y \; \text{Progenitor}(x, y) \leftrightarrow \text{Descendente}(y, x)\,.$$

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.

A mãe de uma pessoa é o progenitor feminino.

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.
- Os axiomas também exprimem factos básicos.

Leto é a Mãe de Apolo.

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.
- Os axiomas também exprimem factos básicos.
- As regras da Árvore Genealógica (e mais algumas nos exercícios) formam os axiomas deste domínio.

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.
- Os axiomas também exprimem factos básicos.
- As regras da Árvore Genealógica (e mais algumas nos exercícios) formam os axiomas deste domínio.
- As definições são axiomas da forma $\forall x, y\ p(x, y) \leftrightarrow \cdots$.

$$\forall x, m\ \text{Mãe}(x) = m \leftrightarrow \text{Feminina}(m) \wedge \text{Progenitor}(m, x)$$

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.
- Os axiomas também exprimem factos básicos.
- As regras da Árvore Genealógica (e mais algumas nos exercícios) formam os axiomas deste domínio.
- As definições são axiomas da forma $\forall x, y \ p(x, y) \leftrightarrow \cdots$.
- Estas regras assentam apenas nas relações Descendente, Cônjuge e Feminina.

  Exercício: Encontre outro conjunto de relações primitivas.

- Os axiomas são as regras «*iniciais*», que proporcionam a informação básica de um domínio.
- Os axiomas também exprimem factos básicos.
- As regras da Árvore Genealógica (e mais algumas nos exercícios) formam os axiomas deste domínio.
- As definições são axiomas da forma $\forall x, y\ p(x, y) \leftrightarrow \cdots$.
- Estas regras assentam apenas nas relações Descendente, Cônjuge e Feminina.
- Nem todas as afirmações sobre um domínio são axiomas. Algumas são teoremas, *isto é* são deduzidas, via dedução natural, dos axiomas. Por exemplo (exercício):

$$\vdash \forall x, y\ \mathsf{Irm}_{\sqcup}(x, y) \leftrightarrow \mathsf{Irm}_{\sqcup}(y, x) .$$

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural).

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.
   $\forall n\ N(n) \rightarrow N\big(S(n)\big)$

Linguagem dos Números (Naturais)

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.
   $\forall n\ N(n) \to N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor.

Linguagem dos Números (Naturais)

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.
   $\forall n\ N(n) \rightarrow N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor. $\forall n\ 0 \neq S(n)$

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número. $\forall n\ N(n) \to N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor. $\forall n\ 0 \neq S(n)$
4. Números diferentes têm sucessores diferentes.

Linguagem dos Números (Naturais)

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.
   $\forall n\ N(n) \to N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor. $\forall n\ 0 \neq S(n)$
4. Números diferentes têm sucessores diferentes.
   $\forall m, n\ m \neq n \to S(m) \neq S(n)$

Linguagem dos Números (Naturais)

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número. $\forall n\ N(n) \rightarrow N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor. $\forall n\ 0 \neq S(n)$
4. Números diferentes têm sucessores diferentes. $\forall m, n\ m \neq n \rightarrow S(m) \neq S(n)$
5. O *Princípio de Indução* é de *Segunda Ordem*; Não será usado aqui. $\forall R\ \Big(R(0) \wedge \forall n\ R(n) \rightarrow R\big(S(n)\big)\Big) \rightarrow R = N$

Linguagem dos Números (Naturais)

Constantes: 0 (Zero).

Funções: S_1 (Sucessor).

Relações: N_1 (Número Natural).

Regras: (Axiomas de Peano).

1. Zero é um número (natural). $N(0)$
2. O sucessor de um número é um número.
   $\forall n \; N(n) \to N\big(S(n)\big)$
3. Zero não é um sucessor. $\forall n \; 0 \neq S(n)$
4. Números diferentes têm sucessores diferentes.
   $\forall m, n \; m \neq n \to S(m) \neq S(n)$
5. O *Princípio de Indução* é de *Segunda Ordem*; Não será usado aqui.
   $\forall R \; \Big(R(0) \wedge \forall n \; R(n) \to R\big(S(n)\big)\Big) \to R = N$

Notação: $n \in \mathbb{N} : N(n)\,,\, n' : S(n)\,,\, 1 : 0', 2 : 1', \ldots.$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Função: Soma_2 (Soma).

Definição (base): $\forall n\ N(n) \to \mathsf{Soma}(0, n) = n$

Definição (passo):

$$\forall n, m\ N(n) \wedge N(m) \to \mathsf{Soma}(\mathsf{S}(n), m) = \mathsf{S}(\mathsf{Soma}(n, m))$$

Notação: $n + m : \mathsf{Soma}(n, m)$

Exemplo: Cálculo de $2 + 2$

$2+2$	$= \mathsf{Soma}(2,2)$	$= \mathsf{Soma}\left(\boxed{\mathsf{S}(1)}, 1'\right)$	notação
	$= \boxed{\mathsf{S}}\left(\mathsf{Soma}(1, 1')\right)$	$= \mathsf{S}\left(\mathsf{Soma}(\mathsf{S}(0), 1')\right)$	passo
	$= \mathsf{S}\left(\mathsf{S}\left(\boxed{\mathsf{Soma}(0, 1')}\right)\right)$	$= \mathsf{S}\left(\mathsf{S}\left(\boxed{1'}\right)\right)$	base
	$= 1''' = 2'' = 3'$		notação
	$= 4$		

Linguagem dos Conjuntos

Termos: São de dois tipos, *elementos* e *conjuntos*.

Constantes: $\emptyset$ (Vazio).

Relações: Conjunto_1 (Conjunto); $x \in y$ (Pertence); $x \subseteq y$ (Subconjunto).

Funções: $x \cap y$ (Interseção); $x \cup y$ (União); $\{x|y\}$ (Inclusão) (de x em y).

Regras: próximas páginas

1. Os únicos conjuntos são o vazio e os que resultam de acrescentar um elemento a outro conjunto.

$$\forall s\ \mathsf{Conjunto}(s) \leftrightarrow s = \emptyset \vee \exists x, s_0\ \mathsf{Conjunto}(s_0) \wedge s = \{x|s_0\}\,.$$

2. O vazio não tem elementos.

$$\neg\exists x, s\ \emptyset = \{x|s\}\,.$$

3. Acrescentar um elemento que já está no conjunto não tem efeito.

$$\forall x, s\ x \in s \leftrightarrow s = \{x|s\}\,.$$

4. Os (únicos) elementos que estão num conjunto (são elementos que) foram incluídos.

$$\forall x, s\ x \in s \leftrightarrow \left[\exists y, s_0\ \left(s = \{y|s_0\} \wedge (x = y \vee x \in s_0)\right)\right].$$

5. **Exercício:** Um conjunto é subconjunto de outro se e só se todos os elementos do primeiro conjunto são elementos do segundo conjunto.
6. **Exercício:** Dois conjuntos são iguais se e só se cada um é subconjunto do outro.
7. **Exercício:** Um objeto está na interseção de dois conjuntos se e só se é elemento de ambos os conjuntos.
8. **Exercício:** Um objeto está na união de dois conjuntos se e só se é elemento de algum dos conjuntos.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Termos: São de dois tipos, *elementos* e *listas*.

Constantes: [ ] (Nil).

Relações: List_1 (Lista); Find_2 (Pertence).

Funções: Cons_2 (Construção); Append_2 (Acrescentar); First_1 (Primeiro); Rest_1 (Restantes);

Regras: **Exercício.** Formalize

- [ ] é a lista sem elementos.
- $\text{List}(x)$: x é lista.
- $\text{Find}(x, y)$: x está na lista y.
- $\text{Cons}(x, y)$: é a lista que resulta de acrescentar o elemento x *à frente* de y.
- $\text{Append}(x, y)$ é a lista que resulta de acrescentar a lista y ao fim da lista x.
- $\text{First}(x)$: o primeiro elemento da lista x.
- $\text{Rest}(x)$: a lista x sem o primeiro elemento.

Notação: $\left[x|y\right]$: $\text{Cons}(x, y)$; $[x]$: $\left[x|\,[\,]\right]$; $[x_1, x_2, \ldots]$: $\left[x_1|\,[x_2, \ldots]\right]$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Termos: São de dois tipos, os estados do autómato e os símbolos do alfabeto.

Constantes: I (Estado Inicial).

Relações: E_1 (Estados); F_1 (Finais); T_3 (Transição);

Funções: (nenhuma)

Regras:

1. **Bem-formado 1**
   $\forall p, a, q \; T(p, a, q) \rightarrow \big(E(p) \wedge E(q) \wedge \neg E(a)\big)$
2. **Bem-formado 2** $\forall s \; F(s) \rightarrow E(s)$
3. **Transição Funcional**
   $\forall p, a, q_1, q_2 \; \big(T(p, a, q_1) \wedge T(p, a, q_2)\big) \rightarrow q_1 = q_2.$
4. **AFD** $\forall p, a \; \big(E(p) \wedge \neg E(a)\big) \rightarrow \exists q \; T(p, a, q).$
5. **Bem-preparado 1** $\neg F(I) \wedge \exists p \; F(p).$
6. **Bem-preparado 2** $\forall p, q \; F(p) \wedge F(q) \rightarrow p = q.$

- A Lógica de Primeira Ordem é muito mais expressiva do que a Lógica Proposicional.
- Mas SAT é insolúvel para as fórmulas da LPO.
- E tem limites. A existência de caminho entre dois vértices de um grafo orientado (Reachability problem na wikipedia) não pode ser expressa por uma fórmula da LPO.
- Porém, é realizável especificar e verificar modelos.
- Aplicações da LPO incluem:
  - Especificação de Tarefas.
  - Representação de Conhecimento.
  - Verificação de Programas.

Mas porque por vezes o pensamento é acompanhado de ação e outras não, por vezes de movimento, e outras não?

Parece que quase o mesmo acontece no caso do raciocínio e das inferências sobre os objetos imutáveis. Mas nesse caso o fim é uma proposição especulativa. . . enquanto que aqui a conclusão que resulta das duas premissas é uma ação.

Preciso de abrigo; Uma manta é um abrigo; Preciso de uma manta; Aquilo de que preciso, tenho de fazer; Preciso de uma manta; Tenho de fazer uma manta.

E a conclusão, *Tenho de fazer uma manta*, é uma ação.

De Motu Animalium, Aristóteles
Tradução livre baseada na *tradução de A. S. L. Farquharson*.