Lógica Proposicional

Lógica e Computação

Francisco Coelho

Departamento de Informática
Escola de Ciências e Tecnologia
Universidade de Évora

21 de fevereiro de 2022

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

O mundo é descrito por factos, que são verdadeiros ou falsos.

Objetivo — Descrever **factos**, saber como chegar a **conclusões** a partir de **hipóteses** dadas e relacionar **consequência** com **verdade**.

Plano — Definir uma **linguagem** adequada. Descrever as **regras para deduzir** e as formas de **avaliar** factos.

Avaliar — Quais são **limites computacionais e expressivos**.

Usufruir — Que problemas podem ser descritos e resolvidos?

- *«O café está quente.»*
- *«O café está quente?»*
- *«O café e o açúcar.»*
- *«O café está ou não quente?»*
- *«Ou o café ou o leite está azedo.»*

$$\neg p \qquad p \wedge q$$
$$p \vee q \quad p \rightarrow q$$

- Definição formal das **proposições**.
- Casos atómicos: proposições indivisíveis («*está a chover*»).
- Casos estruturados:

negação	«*não está a chover*».
conjunção	«*está a chover e a fazer sol*»
disjunção	«*está a chover ou a fazer sol*»
implicação	«*se está a fazer sol então não está a chover*».

- Não estamos **ainda** interessados no valor booleano duma proposição.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Proposição)

Uma proposição é uma expressão que resulta exclusivamente de um dos seguintes casos:

- Uma **proposição atómica** (ou *letra proposicional*), $a, b, \ldots, p, q, \ldots, x, y, z$.
- A **negação**, $\neg p$, de uma proposição.
- A **conjunção**, $p \wedge q$, **disjunção**, $p \vee q$, ou **implicação**, $p \to q$, de duas proposições.

N.B. Usam-se parêntesis e as precedências comuns para interpretar expressões como $\neg a \to b \vee (c \wedge d)$.

Exemplos de Proposições

- a representa «*Está a chover*».
- b representa «*O número cinco é par*».
- c representa «*Coimbra fica em Portugal*».
- $\neg a$: «*Não está a chover*».
- $\neg b$: «*O número cinco não é par*».
- $\neg c$: «*É falso que Coimbra fique em Portugal*».
- $\neg\neg a$: «*É falso que não está a chover*».
- $a \wedge b$: «*Está a chover e o número cinco é par*».
- $a \wedge \neg a$: «*Está a chover e não está a chover*».
- $a \wedge a$: «*Está a chover e está a chover*».
- $a \wedge \neg b \wedge c$: "Está a chover mas o número cinco não é par. Além disso, Coimbra fica em Portugal".

Exemplos de Proposições (cont.)

- $a \vee b$: «*Está a chover ou o número cinco é par*».
- $a \vee \neg a$: «*Ou está ou não está a chover*».
- $a \vee a$: «*Está a chover ou está a chover*».
- $a \vee (\neg b \wedge c)$:
  «*Ou está a chover ou o número cinco não é par e Coimbra fica em Portugal*».
  Na notação formal não há a ambiguidade da escrita natural.
- $a \rightarrow b$: «*Se está a chover então o número cinco é par*».
- $a \rightarrow \neg a$: «*Está a chover, portanto não está a chover*».
- $a \rightarrow a$: «*Como está a chover também está a chover*».
- $b \rightarrow \neg c$: «*Coimbra não está em Portugal porque cinco é par*».
- penso $\rightarrow$ existo: «*Se penso, existo*»

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

- Erros sintáticos: $p \wedge \wedge q$, $q \neg \wedge$, ...
- $a \vee b$ representa a, b ou **ambos**.
- Não são proposições: **perguntas**, «*O café está frio?*» e **imperativos**, «*Corre!*».
- Coloquialismos:
  - «a *excepto se* b», «a *a não ser que* b»: $a \vee b$
    «*chove, excepto quando (se) faz sol*»;
    «*chove a não ser que faça sol*».
    Um caso é alternativo ao outro. *Sempre que não se dá um,* ***é certo*** *que se dá o outro.*
  - «b *porque* a», «*quando* a *também* b» ou «b *sempre que* a»: $a \to b$.
    «*quando faz sol também passeio*»;
    «*passeio sempre que faz sol*». *Se fizer sol,* ***é certo*** *que passeio. Mas, além disso, também posso passear sem que faça sol.*

$$\neg \quad \wedge \quad \top \quad \uparrow \quad \leftrightarrow$$
$$\vee \quad \rightarrow \quad \bot \quad \downarrow \quad \dot{\vee}$$

- Os símbolos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ designam-se **conectivos** pois conectam (ligam) proposições mais simples.
- A definição de proposição exclui certos conectivos comuns, como $\top, \bot, \leftrightarrow$ e $\dot{\vee}$.
- Mais tarde estas «*operações*», e outras, serão introduzidas, como *abreviaturas* de proposições definidas apenas com $\neg, \wedge, \vee$ e $\rightarrow$.
- É possível dispensar quase todos os conectivos e «*começar*» apenas com, por exemplo $\neg, \vee$ ou mesmo só com $\overline{\wedge}$ ($a \overline{\wedge} b$ é «*equivalente*» a $\neg(a \wedge b)$).

$$H \vdash p$$

Uma Grande Descoberta (dos filósofos Gregos!)

Algumas consequências resultam apenas da sintaxe das proposições e o assunto tratado é irrelevante.

Objetivo

Usar regras para deduzir consequências de certas hipóteses.

Que **regras** relacionam as consequências com a «*forma*» das hipóteses?

$$H \vdash p$$

- A **hipótese**, H, é um conjunto de proposições.
- A **conclusão**, p, é uma proposição.
- As proposições são expressões construídas com letras e **conectivos** — As **regras** dizem respeito aos conectivos e são de dois tipos: introdução ou eliminação.
- A aplicação de várias regras produz uma **prova**.
- A notação $H \vdash p$ indica que existe uma prova com hipóteses H e conclusão p.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação da Conjunção)

Eliminação da conjunção (esquerda) $\wedge_1{}^- : p \wedge q \vdash p$ ou

$$\frac{p \wedge q}{p}\ (\wedge_1{}^-).$$

Eliminação da conjunção (direita) $\wedge_2{}^- : p \wedge q \vdash q$ ou

$$\frac{p \wedge q}{q}\ (\wedge_2{}^-).$$

Como

$$\begin{array}{lll} 1. & \text{faz sol} \land \text{vou à praia} & \text{H} \\ \hline 2. & \text{faz sol} & \land_1^- \quad 1 \end{array}$$

escreve-se

$$\text{faz sol} \land \text{vou à praia} \vdash \text{faz sol}$$

isto é, faz sol é **consequência** da **hipótese** faz sol $\land$ vou à praia.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução da Conjunção)

$$\wedge^+ : \{p, q\} \vdash p \wedge q$$

ou

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q} \; (\wedge^+) \, .$$

Como

1.	faz sol	H	
2.	vou à praia	H	
3.	faz sol $\wedge$ vou à praia	$\wedge^+$	1, 2

escreve-se

$$\{\text{faz sol}, \text{vou à praia}\} \vdash \text{faz sol} \wedge \text{vou à praia}$$

isto é, faz sol $\wedge$ vou à praia é **consequência** das **hipóteses** $\{$faz sol, vou à praia$\}$.

Mostre que $p \dashv\vdash p \wedge p$.

1.	p	H		
2.	$p \wedge p$	$\wedge^{+}$	$1, 1$	$\square$

1.	$p \wedge p$	H		
2.	p	$\wedge_1{}^{-}$	1	$\square$

Mostre que $p \wedge q \vdash q \wedge p$.

1.	$p \wedge q$	H		
2.	p	$\wedge_1{}^{-}$	1	
3.	q	$\wedge_2{}^{-}$	1	
4.	$q \wedge p$	$\wedge^{+}$	$3, 2$	$\square$

Como

1.	faz sol	H	
2.	vou à praia $\wedge$ está calor	H	
3.	está calor	$\wedge_2^-$	2
4.	está calor $\wedge$ faz sol	$\wedge^+$	3, 1

então

$$\{\text{faz sol}, \text{vou à praia} \wedge \text{está calor}\} \vdash \text{está calor} \wedge \text{faz sol}.$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução e Eliminação da Dupla Negação)

Introdução da dupla negação $\neg\neg^{+} : p \vdash \neg\neg p$ ou

$$\frac{p}{\neg\neg p}\ (\neg\neg^{+})\,.$$

Eliminação da dupla negação $\neg\neg^{-} : \neg\neg p \vdash p$ ou

$$\frac{\neg\neg p}{p}\ (\neg\neg^{-})\,.$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação da Implicação, *Modus Ponens*)

$$\to^{-} \text{ ou } \mathbb{MP} : \{p, p \to q\} \vdash q$$

ou

$$\frac{p \quad p \to q}{q} \ \left(\to^{-} \text{ ou } \mathbb{MP}\right).$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

1. «*está frio.*»
2. «*se está frio, levo cachecol.*»
3. **portanto,** «*levo cachecol.*»

Formalmente:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \text{está frio} \\
2. & \text{está frio} \rightarrow \text{levo cachecol} \\
\hline
3. & \text{levo cachecol}
\end{array}
$$

Mostre que $p, p \to q, q \to r \vdash r$.

1.	p	H		
2.	$p \to q$	H		
3.	$q \to r$	H		
4.	q	$\mathbb{MP}$	1, 2	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 3	$\square$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução da Implicação)

$$\to^+ : \left\{[p \vdash q]\right\} \vdash p \to q$$

ou

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} p & H \\ \vdots & \\ q & \end{array}}}{p \to q}\ (\to^+)\,.$$

As notações $[\cdots]$ e $\boxed{\cdots}$ definem uma sub-prova com hipóteses locais, que não são válidas fora dessa sub-prova – isto é, as **hipóteses locais** duma sub-prova são **descartadas** com a aplicação da regra.

Exercício: Cadeia de Implicações II

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

$$1. \quad p \to q \quad H$$

Exercício: Cadeia de Implicações II

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H
2.	$q \to r$	H

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H
2.	$q \to r$	H
3.	p	H

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H	
2.	$q \to r$	H	
3.	p	H	
4.	q	$\mathbb{MP}$	$3, 1$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H	
2.	$q \to r$	H	
3.	p	H	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Exercício: Cadeia de Implicações II

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^{+}$	$3-5$	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H
2.	$q \to r$	H

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	$3-5$	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H
2.	$q \to r$	H
3.	p	H

Exercício: Cadeia de Implicações II

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H	
2.	$q \to r$	H	
3.	p	H	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	$3-5$	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H	
2.	$q \to r$	H	
3.	p	H	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H	
2.	$q \to r$	H	
3.	p	H	(6)
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5

Mostre que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H		
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	$\square$

Mostre que $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$.

1.	$p \to q$	H		
2.	$q \to r$	H	(7)	
3.	p	H	(6)	
4.	q	$\mathbb{MP}$	3, 1	
5.	r	$\mathbb{MP}$	4, 2	
6.	$p \to r$	$\to^+$	3 – 5	
7.	$(q \to r) \to (p \to r)$	$\to^+$	2 – 6	$\square$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução da Disjunção)

Introdução da disjunção (esquerda) ${\vee_1}^+ : p \vdash p \vee q$ ou

$$\frac{p}{p \vee q}\ ({\vee_1}^+)\,.$$

Introdução da disjunção (direita) ${\vee_2}^+ : q \vdash p \vee q$ ou

$$\frac{q}{p \vee q}\ ({\vee_2}^+)\,.$$

Eliminação da Disjunção

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Eliminação da Disjunção)

$$\vee^{-} : \{p \vee q, [p \vdash r], [q \vdash r]\} \vdash r$$

ou

$$\dfrac{p \vee q \quad \boxed{\begin{array}{ll} p & H \\ \vdots & \\ r & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} q & H \\ \vdots & \\ r & \end{array}}}{r}\ (\vee^{-})\,.$$

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ H

13. $p \vee (q \wedge r)$

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H	
2.	$p \vee q$	$\wedge_1^-$	1
13.	$p \vee (q \wedge r)$		

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Exercício: (Semi-)Propriedade Distributiva

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	${\wedge_1}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	3	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	$\wedge_2{}^-$	1	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	$\wedge_2{}^-$	1	
7.	p	H		1o caso de 6
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	$\wedge_2^-$	1	
7.	p	H		1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1^+$	7	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Exercício: (Semi-)Propriedade Distributiva

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	${\wedge_1}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	${\wedge_2}^-$	1	
7.	p	H		1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	7	
9.	r	H		2o caso de 6
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	$\wedge_2{}^-$	1	
7.	p	H		1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	7	
9.	r	H		2o caso de 6
10.	$q \wedge r$	$\wedge^+$	5, 9	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	$\wedge_1{}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	$\wedge_2{}^-$	1	
7.	p	H		1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_1{}^+$	7	
9.	r	H		2o caso de 6
10.	$q \wedge r$	$\wedge^+$	5, 9	
11.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee_2{}^+$	10	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	${\wedge_1}^-$	1	
3.	p	H		1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	3	
5.	q	H		2o caso de 2
6.	$p \vee r$	${\wedge_2}^-$	1	
7.	p	H	(12)	1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	7	
9.	r	H	(12)	2o caso de 6
10.	$q \wedge r$	$\wedge^+$	5, 9	
11.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_2}^+$	10	
12.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee^-$	6, 7 − 8, 9 − 11	
13.	$p \vee (q \wedge r)$			

$$\vee^- : p \vee q, [p \vdash r], [q \vdash r] \vdash r$$

Mostre que $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$.

1.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	H		
2.	$p \vee q$	${\wedge_1}^-$	1	
3.	p	H	(13)	1o caso de 2
4.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	3	
5.	q	H	(13)	2o caso de 2
6.	$p \vee r$	${\wedge_2}^-$	1	
7.	p	H	(12)	1o caso de 6
8.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_1}^+$	7	
9.	r	H	(12)	2o caso de 6
10.	$q \wedge r$	$\wedge^+$	5, 9	
11.	$p \vee (q \wedge r)$	${\vee_2}^+$	10	
12.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee^-$	6, 7 − 8, 9 − 11	
13.	$p \vee (q \wedge r)$	$\vee^-$	2, 3 − 4, 5 − 12	$\square$

$$\vee^- : p \vee q, [p \vdash r], [q \vdash r] \vdash r$$

Definição (Introdução da Negação)

$$\neg^{+} : \{[p \vdash q \wedge \neg q]\} \vdash \neg p$$

ou

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} \quad p & \qquad H \\ \quad \vdots & \\ q \wedge \neg q & \end{array}}}{\neg p} \; (\neg^{+}) \, .$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Contradição)

- Qualquer proposição da forma $p \wedge \neg p$ é uma **contradição**.
- Usa-se o símbolo $\perp$ para representar contradições.

A regra $\neg^+$ pode ser re-escrita $\{[p \vdash \perp]\} \vdash \neg p$ ou

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} p & H \\ \vdots & \\ \perp & \end{array}}}{\neg p}\ (\neg^+)\,.$$

Não é evidente (por enquanto) que esta definição de $\perp$ seja legítima!
Porque é que não depende de p? O $\perp$ de $p \wedge \neg p$ é o mesmo de $q \wedge \neg q$?

Definição (Introdução e Eliminação da Contradição)

Introdução da contradição $\perp^+ : \{p, \neg p\} \vdash \perp$ ou

$$\frac{p \quad \neg p}{\perp}\ (\perp^+)\,.$$

Eliminação da contradição $\perp^- : \perp \vdash p$ ou

$$\frac{\perp}{p}\ (\perp^-)\,.$$

N.B. Pode ser escolhida qualquer proposição p nestes enunciados. Isto é, *de uma contradição é sempre possível provar qualquer proposição*.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Introdução de Teses)

$$\mathbb{T}^+ : \{[H \vdash p]\,, H\} \vdash p$$

ou

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} H \\ \vdots \\ p \end{array}} \quad H}{p} \; (\mathbb{T}^+)\,.$$

N.B. Esta regra permite **usar provas anteriores como regras**. Se previamente foi provado que $H \vdash p$ e na prova actual ocorrem todas as hipóteses de H então p é uma conclusão.

Tabela de Regras

${\bigwedge_1}^{-}$ ${\bigwedge_2}^{-}$	$p \wedge q \ \vdash p$ $p \wedge q \ \vdash q$	$\bigwedge^{+}$	$p, q \ \vdash p \wedge q$
$\neg\neg^{-}$	$\neg\neg p \ \vdash p$	$\neg\neg^{+}$	$p \ \vdash \neg\neg p$
$\mathbb{MP}$	$p, p \to q \ \vdash q$	$\to^{+}$	$[p \vdash q] \ \vdash p \to q$
$\bigvee^{-}$	$p \vee q, [p \vdash r], [q \vdash r] \ \vdash r$	${\bigvee_1}^{+}$ ${\bigvee_2}^{+}$	$p \ \vdash p \vee q$ $q \ \vdash p \vee q$
		$\neg^{+}$	$[p \vdash \bot] \ \vdash \neg p$
$\bot^{-}$	$\bot \ \vdash p$	$\bot^{+}$	$p, \neg p \ \vdash \bot$
		$\mathbb{T}^{+}$	$[H \vdash p], H \ \vdash p$

Sobre as Regras Derivadas

- Certas regras facilitam e reduzem significativamente o número de passos numa prova.
- É necessário demonstrar que as regras novas resultam das anteriores.
- Também as regras anteriores são redundantes: algumas resultam das restantes.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (*Modus Tollens*)

$\mathbb{MT} : p \to q, \neg q \vdash \neg p$ ou

$$\frac{p \to q \quad \neg q}{\neg p} \; (\mathbb{MT}) \,.$$

Demonstração.

1.	$p \to q$	H	
2.	$\neg q$	H	
3.	p	H	(6)
4.	q	$\mathbb{MP}$	1, 3
5.	$\perp$	$\perp^+$	4, 2
6.	$\neg p$	$\neg^+$	3 – 5

□

Definição (Redução ao Absurdo)

$\mathbb{RA} : [\neg p \vdash \bot] \vdash p$ ou

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} \neg p & \mathrm{H} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}}{p}\ (\mathbb{RA})\,.$$

Demonstração.

1.	$\neg p \to \bot$	H	
2.	$\neg p$	H	(4)
3.	$\bot$	$\mathbb{MP}$	1, 2
4.	$\neg\neg p$	$\neg^{+}$	2 – 3
5.	p	$\neg\neg^{-}$	4

□

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Terceiro Excluído)

$\mathbb{TE} : \vdash p \vee \neg p$ ou

$$\dfrac{}{p \vee \neg p}\ (\mathbb{TE})\,.$$

Demonstração.

1.	$\neg(p \vee \neg p)$	H	(8)
2.	p	H	(5)
3.	$p \vee \neg p$	$\vee_1{}^{+}$	2
4.	$\perp$	$\perp^{+}$	1, 3
5.	$\neg p$	$\neg^{+}$	2 – 4
6.	$p \vee \neg p$	$\vee_2{}^{+}$	5
7.	$\perp$	$\perp^{+}$	1, 6
8.	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg^{+}$	1 – 7
9.	$p \vee \neg p$	$\neg\neg^{-}$	8

$\square$

Exemplos: Regras Derivadas

A regra $\neg\neg^+ : p \vdash \neg\neg p$ como resultado de $\perp^-, \perp^+$.
Como

$$
\begin{array}{llll}
1. & p & H & \\
2. & \neg p & H & (4) \\
3. & \perp & \perp^+ & 1,2 \\
\hline
4. & \neg\neg p & \perp^- & 2-3
\end{array}
$$

então $p \vdash \neg\neg p$. Isto é,

$$\frac{p}{\neg\neg p}\ (\neg\neg^+)$$

$$H \vdash p$$

- Uma **regra**, $\mathbf{R}$, especifica como certas **hipóteses**, H, produzem uma determinada **conclusão**, p:

$$\frac{H}{p}\ (\mathbf{R})\,.$$

- Encadeando várias regras obtém-se uma **prova**, representada por

$$\begin{array}{llll} 1. & p_1 & \mathbf{R_1} & L_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n. & p_n & \mathbf{R_n} & L_n \end{array}$$

- A relação entre as **hipóteses não descartadas**, H, e a **conclusão na última linha**, p, é representada por $H \vdash p$ e diz-se que p é consequência sintática de H.

$$v(\mathrm{p}) \qquad v \models \mathrm{p} \qquad \mathrm{H} \models \mathrm{p}$$

Objectivo

Associar valores booleanos $\mathtt{v}, \mathtt{f}$ a proposições.

- As **regras** da derivação natural usam apenas a **sintaxe** das proposições, e permitem definir/afirmar se uma conclusão p é **derivada** de certas hipóteses H: $\mathrm{H} \vdash \mathrm{p}$.
- $\mathrm{H} \vdash \mathrm{p}$ não é **booleana** no sentido em que **não depende dos valores** $\mathtt{v}, \mathtt{f}$ **de** H **e de** p.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$v(\mathrm{p})$$

Definição (Valoração)

Uma valoração é uma função que associa um valor booleano, `v` ou `f`, a cada proposição, de forma que:

Átomo É definido explicitamente para cada átomo.

Conectivo Cada caso $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ resulta da tabela

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	v	f
f	v	v	f	v	v
f	f	v	f	f	v

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exemplo (Valorações)

Sejam $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ duas proposições atómicas.

- Se $v(\mathtt{p}) = \mathtt{v}, v(\mathtt{q}) = \mathtt{v}$:

$$\begin{array}{rrr} v(\neg \mathtt{p}) = \mathtt{f} & v(\neg \mathtt{q}) = \mathtt{f} & v(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) = \mathtt{v} \\ v(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) = \mathtt{v} & v(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) = \mathtt{v} & v(\mathtt{p} \to \neg \mathtt{q}) = \mathtt{f} \end{array}$$

- Se $v(\mathtt{p}) = \mathtt{f}, v(\mathtt{q}) = \mathtt{v}$:

$$\begin{array}{rrr} v(\neg \mathtt{p}) = \mathtt{v} & v(\neg \mathtt{q}) = \mathtt{f} & v(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) = \mathtt{f} \\ v(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) = \mathtt{v} & v(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) = \mathtt{v} & v(\mathtt{p} \to \neg \mathtt{q}) = \mathtt{v} \end{array}$$

O valor booleano de uma proposição depende apenas dos valores booleanos dos átomos que ocorrem nessa proposição.

Consistência da Definição de $\perp$

- Previamente $\perp$ foi definido como uma «*representação*» de $p \wedge \neg p$.
- Então foi questionado se o $\perp$ que representa $p \wedge \neg p$ será o mesmo que representa, por exemplo, $q \wedge \neg q$.
- Na tabela de $p \wedge \neg p$ **todas as linhas são** $\mathtt{f}$, tal como serão em $q \wedge \neg q$ ...
- ... ou em qualquer outra proposição que resulte de substituir p em $p \wedge \neg p$, como $(p \vee r) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$ por exemplo.

Isto é, $\perp$ é «*sempre* $\mathtt{f}$». Analogamente, $\top$ é «*sempre* $\mathtt{v}$».

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$\nu \models p \qquad \nu \models H$$

Definição (Modelo)

- Seja p uma proposição. Um modelo de p é uma valoração ν tal que $\nu(p) = \mathrm{v}$. Nesse caso escreve-se $\nu \models p$.
- Se H for um conjunto de proposições, um modelo de H é um modelo de todos os seus elementos: $\nu \models H$ se e só se $\nu \models h$ para cada $h \in H$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Tipos de Proposições)

Uma proposição p é:

Compatível se tem algum modelo:
existe v **tal que** $v \models p$.

Válida ou Tautologia se qualquer valoração é modelo:
para qualquer v, $v \models p$.

Contigente se tem um modelo e uma *refutação*:
existem u, v **tais que** $u \models p$ **e** $v \not\models p$.

Contradição ou Incompatível se não tem modelos:
para qualquer v, $v \not\models p$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exemplo (Tipos de proposições)

Compatível	$p \vee q, p, p \to r, p \vee \neg p.$
Válida	$p \vee \neg p, (p \wedge q) \to q, p \to (q \to p)\,.$
Contigente	$p, p \wedge q, p \vee q\,.$
Contradição	$p \wedge \neg p, p \wedge (p \to \neg p)\,, (p \wedge q) \to \neg q.$

$$H \models p$$

Objectivo

Determinar se a proposição p é verdadeira supondo que são verdadeiras certas hipóteses H.

Mais concretamente, pretende-se relacionar os valores booleanos das **hipóteses** com os da **conclusão**.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$H \models p$$

Definição (Consequência semântica)

Sejam H um conjunto de proposições e p uma proposição. Diz-se que p é consequência semântica de H e escreve-se $H \models p$ **se qualquer modelo de** H **também é modelo de** p:

$$v \models H \text{ implica } v \models p$$

- $H \not\models p$: **existe um modelo de** H **falso em** p.
- Para que $H \models p$ é necessário que, **para cada valoração** v,

$$\text{se } \forall h \in H, v \models h \text{ então } v \models p.$$

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exemplo

- $\{p, q\} \models p$ porque qualquer modelo de $\{p, q\}$ também é modelo de p: se $v \models \{p, q\}$ então $v \models p$.
- $\{p, q\} \models p \wedge q$ porque qualquer modelo de $\{p, q\}$ também é modelo de p e de q. De acordo com as **regras das valorações** também tem de ser modelo de $p \wedge q$.
- $\{p\} \models p \vee q$ porque se uma valoração modelo de p, de acordo com as regras das valorações, também é modelo de $p \vee q$.
- $\{p \wedge q\} \models p \vee q$ porque um modelo de $p \wedge q$, de acordo com as regras das valorações, tem de ser modelo de p e de q. Portanto também é modelo de $p \vee q$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Exemplo

- $\{p \vee q\} \not\models p \wedge q$ porque com a valoração $\nu(p) = \mathtt{v}; \nu(q) = \mathtt{f}$ temos $\nu \models p \vee q$ mas $\nu \not\models p \wedge q$.
- $\{p, \neg p\} \models q$ porque as hipóteses não têm qualquer modelo. ***Existe um modelo de*** H ***que não é de*** q***?*—Não**.
- $\neg p \models p \rightarrow q$ porque se $\nu(\neg p) = \mathtt{v}$ então $\nu(p) = \mathtt{f}$. Então, de acordo com as regras das valorações, também $\nu(p \rightarrow q) = \mathtt{v}$ *independentemente* de $\nu(q)$.
- $\models p \vee \neg p$ porque para qualquer valoração ν ou $\nu(p) = \mathtt{v}$ ou $\nu(\neg p) = \mathtt{v}$ (**exercício:** porquê?). Portanto $\nu(p \vee \neg p) = \mathtt{v}$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Equivalência Semântica)

Duas proposições p, q são equivalentes se $p \models q$ e $q \models p$. Nesse caso escreve-se $p \equiv q$.

Exemplo

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \to b$	$\neg b \to \neg a$
v	v	f	f	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v
f	f	v	v	v	v

- $\neg a \models a \to b$ mas $a \to b \not\models \neg a$ (linha 1).
- $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$

- O símbolo $\equiv$ não é um conectivo lógico, ao contrário de $\wedge, \vee, \rightarrow$.
- Isto é, se p, q forem proposições $p \equiv q$ não é uma proposição enquanto que $p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ são.
- **Analogamente** $2 < 3$ não é um número mas $2 + 3$, $2 - 3$, 2×3 e $2 \div 3$ são.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \qquad (p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \qquad p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

$$p \to p \equiv \top \qquad p \leftrightarrow p \equiv \top$$

$$p \to \bot \equiv \neg p \qquad \neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \dot{\vee} q$$

$$p \vee \neg p \equiv \top \qquad p \wedge \neg p \equiv \bot$$

$$\frac{H \models p}{H \vdash p} \; \Bigg| \; \frac{h \models p}{h \vdash p} \; \Bigg| \; \frac{\models h \to p}{\vdash h \to p}$$

Teorema

Sejam $H = \{h_1, \ldots, h_N\}$ *um conjunto de proposições,* $h = h_1 \wedge \cdots \wedge h_N$ *e* p *uma proposição. Então:*

- $H \models p$ *se e só se* $h \models p$ *se e só se* $\models h \to p$*.*
- $H \vdash p$ *se e só se* $h \vdash p$ *se e só se* $\vdash h \to p$*.*

Demonstração.

Exercício. □

$$H \models p \quad H \vdash p$$

Teorema (Completude e Segurança)

Seja H *um conjunto de proposições e* p *uma proposição. Então* $H \models p$ *se e só se* $H \vdash p$*.*

Completude: Se $\models p$ então $\vdash p$: qualquer proposição válida é um teorema.

Segurança: Se $\vdash p$ então $\models p$: qualquer teorema é válido.

Na lógica proposicional todas as verdades podem ser demonstradas e todos os teoremas são verdadeiros.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Conectivos derivados)

Sejam p, q duas proposições.

- equivalência $p \leftrightarrow q$ abrevia $(p \to q) \wedge (q \to p)$.
- ou exclusivo $p \otimes q$ abrevia $\neg(p \leftrightarrow q)$.
- nand $p \uparrow q$ abrevia $\neg(p \wedge q)$.
- nor $p \downarrow q$ abrevia $\neg(p \vee q)$.
- tautologia $\top$ abrevia $\neg\bot$.

- Como podem contribuir a Computação e a Informática para a Lógica Proposicional?
  - Algoritmos para (ajudar a) descobrir se uma proposição é um teorema, válida ou compatível.
- Como pode a Lógica Proposicional contribuir para a Computação e para a Informática?
  - Linguagem para descrever processos, estados, erros, *etc.*
  - Métodos para detetar e lidar com essas situações.

- Simplificar a linguagem lógica, descartando a necessidade do conectivo $\rightarrow$.
- Normalizar a estrutura das proposições.
- Usufruir da normalização e simplificação.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Formas Normais)

literal Uma literal é uma proposição atómica ou a negação de uma proposição atómica.

FND Qualquer proposição p é equivalente a uma proposição na forma normal disjuntiva (FND): $\bigvee_i \bigwedge_j c_{ij}$ em que cada c_{ij} é uma literal.

FNC Qualquer proposição p é equivalente a uma proposição na forma normal conjuntiva (FNC): $\bigwedge_i \bigvee_j c_{ij}$ em que cada c_{ij} é uma literal.

$$\bigvee_i \bigwedge_j c_{ij}$$

p	q	$q \leftrightarrow \neg p$	$\bigwedge c_{ij}$	L_i
v	v	f		
v	f	v	$p \wedge \neg q$	L_2
f	v	v	$\neg p \wedge q$	L_3
f	f	f		

Obtemos

$$\begin{aligned} q \leftrightarrow \neg p &\equiv \bigvee \bigwedge c \\ &\equiv L_2 \vee L_3 \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \end{aligned}$$

$$\bigwedge_i \bigvee_j c_{ij}$$

p	q	$q \leftrightarrow \neg p$	$\bigvee \overline{c_{ij}}$	$\overline{L_i}$
v	v	f	$\neg p \vee \neg q$	$\overline{L_1}$
v	f	v		
f	v	v		
f	f	f	$p \vee q$	$\overline{L_4}$

Obtemos

$$\begin{aligned} q \leftrightarrow \neg p &\equiv \bigwedge \bigvee \bar{c} \\ &\equiv \overline{L_1} \wedge \overline{L_4} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \end{aligned}$$

Teorema (Completude Funcional)

Qualquer função booleana pode ser representada por uma proposição usando apenas os conectivos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$.

Demonstração.

Basta aplicar a cálculo da FNC ou da FND à tabela da função. $\square$

Encontrar uma proposição que descreveva uma dada função booleana.

x	y	z	$f(x,y,z)$	L_i	$\overline{L_i}$
v	v	v	v	$x \land y \land z$	$\neg x \lor \neg y \lor \neg z$
v	v	f	f	$x \land y \land \neg z$	$\neg x \lor \neg y \lor z$
v	f	v	f	$x \land \neg y \land z$	$\neg x \lor y \lor \neg z$
v	f	f	v	$x \land \neg y \land \neg z$	$\neg x \lor y \lor z$
f	v	v	v	$\neg x \land y \land z$	$x \lor \neg y \lor \neg z$
f	v	f	v	$\neg x \land y \land \neg z$	$x \lor \neg y \lor z$
f	f	v	f	$\neg x \land \neg y \land z$	$x \lor y \lor \neg z$
f	f	f	f	$\neg x \land \neg y \land \neg z$	$x \lor y \lor z$

Portanto:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\equiv (x \land y \land z) \lor (x \land \neg y \land \neg z) \lor \\ &\qquad (\neg x \land y \land z) \lor (\neg x \land y \land \neg z) \\ &\equiv \text{FND} \end{aligned}$$

Que problemas podem ser resolvidos algoritmicamente?

- Muitos problemas **numéricos**, por exemplo.
- Ordenação, Criptografia, Programação Linear, *etc*
- E na Lógica?

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Definição (Problema, Instância)

Um problema é um conjunto de pares (instância, resposta).

Resolver Consiste em **calcular** a resposta a partir da instância.

Decidir A resposta é boolena («*sim*» ou «*não*»).

- O problema da **resolução** da divisão tem instâncias (a, b) e consiste em **calcular** c tal que $c = a \div b$.
- O problema da **decisão** da divisão tem instâncias (a, b, c) e consiste em **testar** se $c = a \div b$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Satisfação: Decidir se uma proposição p tem um modelo.

- Instâncias: Proposições.
- Pergunta: Existe uma valoração v tal que $v \models p$?

Validade: Decidir se uma proposição p é válida.

- Instâncias: Proposições.
- Pergunta: Para cada valoração v, $v \models p$?

Provabilidade: Decidir se uma proposição p tem uma prova.

- Instâncias: Proposições.
- Pergunta: Existe uma prova de p, *isto é*, $\vdash p$?

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Existe uma valoração v tal que $v \models p$?

- É fácil fazer um algoritmo para resolver a este problema — `Dada uma proposição p, listar e testar as valorações relevantes; parar quando se encontrar um modelo (v) ou se se esgotarem as valorações (f).`
- Pode ser necessário testar todas as valorações relevantes.
- Se p tem n átomos há 2^n valorações relevantes — **exponencial**.
- Este algoritmo não é eficiente.
  Existe um algoritmo «eficiente» para resolver SAT? Ainda ninguém sabe! Quem resolver SAT tem Fama, Fortuna & Glória Instantâneas, Universais & Eternas & etc. e tal.

Uma proposição p pode descrever um sistema complexo:

- Um automóvel.
- Um foguetão.
- Uma central nuclear.
- A economia de um país.
- O clima de um planeta.
- Um ser vivo.
- A ecologia de uma região.
- O funcionamento de um programa.
- ...

Um modelo $v \models p$, descreve as **condições para atingir um objetivo** e/ou as **consequências de uma ação**.

- Embora sejam conhecidos algoritmos que resolvem *rapidamente* problemas SAT com dezenas de milhar de variáveis, a complexidade computacional é desconhecida no caso geral.
- SAT é $\mathcal{NP}$-completo. Isto significa que pode ser **decidido** em tempo polinomial **e** ser usado para resolver vários problemas de otimização, desenho de circuitos, inteligência artificial, *etc*.
- A linguagem da lógica proposicional não descrimina **objetos** de um domínio nem como estes se **relacionam** — portanto SAT sofre também desta limitação.

- A **validade** é equivalente à **provabilidade**, porque $\models p$ se e só se $\vdash p$.
- A **satisfação** é equivalente à **validade**, porque se não existe v tal que $v \models p$ (p é uma contradição) então para qualquer v, $v \models \neg p$ ($\neg p$ é válida).

Problemas Equivalentes

Intuitivamente dois problemas A e B são equivalentes se um algoritmo para resolver A pode ser *facilmente adaptado* para resolver B e *vice-versa*.

Definição (Regra da Resolução)

$\mathbb{R}: \{a \vee c, b \vee \neg c\} \vdash a \vee b$ ou

$$\frac{a \vee c \quad b \vee \neg c}{a \vee b} (\mathbb{R}).$$

Exercício. Derive a regra da resolução.

Generalização

$$\frac{a_1 \vee \cdots \vee a_N \vee \boxed{c_1 \vee \cdots \vee c_K} \quad b_1 \vee \cdots \vee b_M \vee \boxed{\overline{c_1} \vee \cdots \vee \overline{c_K}}}{a_1 \vee \cdots \vee a_N \vee b_1 \vee \cdots \vee b_M} (\mathbb{R})$$

No limite $\{c, \neg c\} \vdash \perp$.

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

One Ring to bring them all and in the darkness bind them

Com as proposições escritas na **FNC** a regra da resolução pode substituir todas as outras.

Definição (Algoritmo de Resolução - Prova por refutação)

Para se verificar se $H \vdash p$ com a regra da resolução:

1. Convertem-se todas as proposições de H e $\neg p$ para a forma normal conjuntiva.
2. Verifica-se se $\{H, \neg p\} \vdash \perp$ por aplicações sucessivas da resolução.

- O **labirinto** consiste numa rede de **salas** ligadas por corredores.
- Algures no labirinto está o **Minotauro**, `M`, que devora quem entrar nessa sala.
- O Minotauro pode ser morto por **Teseu**, `T`, que tem uma única seta e perceciona apenas a sala em que se encontra.
- Algumas salas têm um **poço**, `P`, onde, exceto o minotauro, cai quem entra.
- Numa única sala está **Ariadne**, `A`, que Teseu procura.
- Nas salas adjacentes ao Minotauro **fede**, `f`.
- Nas salas adjacentes aos poços sente-se uma **brisa**, `b`.

N.B. «*Adjacente*» exclui as diagonais.

Formalização

f		b	P
M	f A b	P	b
f		b	
T	b	P	b

m_{ij} o Minotauro está na sala ij.

f_{ij} fede na sala ij.

p_{ij} está um poço na sala ij.

b_{ij} está uma brisa na sala ij.

t_{ij} Teseu está na sala ij.

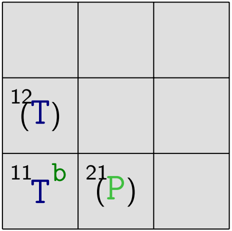
a_{ij} Ariadne está na sala ij.

A base de conhecimento inicial de Teseu, *admitindo que «deteta» tudo na sala em que está*:

$$
\begin{aligned}
t_{11} \wedge \neg m_{11} \wedge \neg p_{11} \wedge \neg a_{11} \wedge \neg f_{11} \wedge \neg b_{11} \wedge \\
f_{11} \leftrightarrow (m_{12} \vee m_{21}) \wedge f_{12} \leftrightarrow (m_{11} \vee m_{22} \vee m_{13}) \wedge \cdots \wedge \\
b_{11} \leftrightarrow (p_{12} \vee p_{21}) \wedge b_{12} \leftrightarrow (p_{11} \vee p_{22} \vee p_{13}) \wedge \cdots \wedge \\
\ldots
\end{aligned}
$$

Use os predicados atómicos $m_{ij}, f_{ij}, p_{ij}, b_{ij}, t_{ij}, a_{ij}$ e:

1. Deduza $\neg m_{21}$ por Teseu. Também pode deduzir $\neg a_{21}$?
2. Descreva, numa proposição, a sala 32 do exemplo anterior.
3. Suponha que o labirinto tem apenas 2×2 salas e formalize:
   - 3.1 Existe apenas um minotauro no labirinto.
   - 3.2 Existe apenas um poço no labirinto.
   - 3.3 Existem dois poços no labirinto.
   - 3.4 O minotauro está na mesma sala que Ariadne.
   - 3.5 O minotauro está numa sala diferente de Ariadne.
   - 3.6 Teseu está na mesma linha que o minotauro.
   - 3.7 Ariadne está na mesma coluna que Teseu.
   - 3.8 Teseu está numa sala adjacente a Ariadne.
4. Porque não consegue formalizar
   «*Cada sala tem quanto muito um poço*»? E se for possível existirem dois poços na mesma sala?



Quando Teseu passa da sala 12, onde não há um poço, para a sala 11, deteta uma brisa. Conclui então que há um poço na sala 21, **ainda não visitada**.

1. Transcrever a regra das brisas, $b_{11} \leftrightarrow (p_{12} \vee p_{21})$, para a FNC:

$$(\neg b_{11} \vee p_{12} \vee p_{21}) \wedge (\neg p_{12} \vee b_{11}) \wedge (\neg p_{21} \vee b_{11}) .$$

2. Listar as proposições relevantes, incluindo:
   - O poço não está em 12: $\neg p_{12}$.
   - Sente-se uma brisa em 11: b_{11}.
   - A negação da tese: $\neg p_{21}$.
3. Aplicar a resolução:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg b_{11} \vee p_{12} \vee p_{21} \qquad b_{11}}{p_{12} \vee p_{21}} \qquad \neg p_{12}}{p_{21}} \qquad \neg p_{21}}{\perp}$$

- Qual o efeito do número de proposições no algoritmo da resolução?
- Qual o efeito do número de átomos em SAT?
- $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$, **resolver** *vs.* **decidir**.

  Resolver: Qual é o número x que multiplicado por 7 dá 56?

  Decidir: O resultado de multiplicar 8 por 7 é 56?

- No Labirinto do Minotauro, como descrever umo labirinto com $n \times m$ salas?
- Em geral, quantas regras são necessárias?

- Minotauro(12).
- $\forall x\ \text{Brisa}(x) \leftrightarrow \exists y\ \text{Adjacente}(x, y) \wedge \text{Poço}(y)$.